

Fizyka dla firm — Matematyka

2. Logika

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

10 października 2022

Notacja

p, q, r, \dots — zdania atomowe, którym można jednoznacznie przypisać wartość prawda (1) lub fałsz (0).

$P(x), Q(x), R(x), \dots$ — formy zdaniowe.

Negacja

p	$\sim p$
1	0
0	1

Równoważność

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

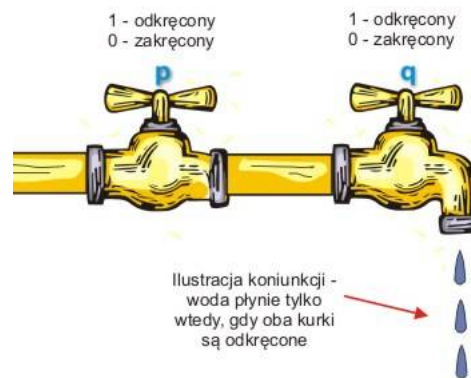
Równoważność jest prawdziwa, jeśli *obie* strony mają taką samą wartość logiczną.

Negacja negacji

$$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$$

Koniunkcja

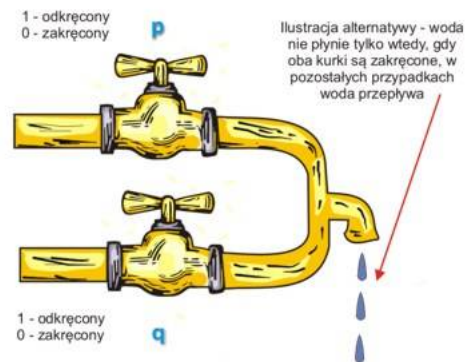
p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0



Zaprzeczenie koniunkcji: $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

Alternatywa

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



Zaprzeczenie alternatywy: $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Implikacja

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Zaprzeczenie implikacji: $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

Implikacja jest **fałszywa tylko** przy prawdziwym poprzedniku i fałszywym następniku. Prawo Dunska Szkota, *ex falso quodlibet*: jeśli poprzednik implikacji jest fałszywy, implikacja jest prawdziwa bez względu na logiczną wartość następnika.

Przykłady

Które twierdzenia są prawdziwe, a które fałszywe?

1. Jeżeli $2 + 3 = 5$, to $4 + 3 = 8$.

2. Jeżeli $2 + 3 = 5$, to $4 + 3 = 7$.

3. Jeżeli $4 + 3 = 8$, to $2 + 3 = 5$.

4. Jeżeli $4 + 3 = 8$, to $2 + 3 = 6$.

Przykłady c.d.

Które twierdzenia są prawdziwe, a które fałszywe?

1. Jeżeli $2 + 3 = 5$, to $4 + 3 = 8$. **fałsz**

2. Jeżeli $2 + 3 = 5$, to $4 + 3 = 7$. **prawda**

3. Jeżeli $4 + 3 = 8$, to $2 + 3 = 5$. **prawda** — fałszywy poprzednik!

4. Jeżeli $4 + 3 = 8$, to $2 + 3 = 6$. **prawda** — fałszywy poprzednik!

Tautologie

Tautologia to zdanie **zawsze** prawdziwe, bez względu na wartość logiczną wchodzących w jego skład zdań atomowych. Prawdziwość tautologii można sprawdzać “metodą zero-jedynkową”.

Przykład — zasada kontrpozycji $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\dots \Leftrightarrow \dots$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Zasada kontrpozycji: logiczna podstawa dowodów nie wprost.

Dwie ważne tautologie

Zasada niesprzeczności (zasada Parmenidesa):

$$\sim (p \wedge \sim p)$$

Zasada wyłączonego środka:

$$p \vee \sim p$$

Negacja kwantyfikatorów

$$\sim (\forall x : P(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \sim P(x))$$

$$\sim (\exists x : P(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \sim P(x))$$

Wnioskowanie — reguła odrywania

$$\frac{p \Rightarrow q \quad p}{q}$$

Jeżeli wiemy, że pewna implikacja jest prawdziwa oraz wiemy, że prawdziwy jest jej poprzednik, wnioskujemy, że prawdziwy jest jej następnik.

Przykład

Twierdzenie: Jeżeli funkcja jest różniczkowalna, to jest ciągła.

Pewna funkcja $g(x)$ jest różniczkowalna

Funkcja $g(x)$ jest ciągła.

Przykład ☺

$$\begin{array}{l} x \text{ jest pijakiem} \Rightarrow x \text{ jest złodziejem} \\ x \text{ jest pijakiem} \\ \hline x \text{ jest złodziejem} \end{array}$$

poprawne wnioskowanie

$$\begin{array}{l} x \text{ jest pijakiem} \Rightarrow x \text{ jest złodziejem} \\ x \text{ jest złodziejem} \\ \hline x \text{ jest pijakiem} \end{array}$$

wnioskowanie niepoprawne

Warunek konieczny, warunek wystarczający

Pewna reguła, którą można wyprowadzić z reguły odrywania:

$$\frac{p \Rightarrow q \quad \sim q}{\sim p}$$

Jeżeli wiemy, że pewna implikacja jest prawdziwa, ale jej następnik jest fałszywy, poprzednik implikacji *musi* być fałszywy.

Podsumowując, jeżeli implikacja $p \Rightarrow q$ jest prawdziwa, prawdziwość q jest **warunkiem koniecznym** prawdziwości p : Jeżeli q jest fałszywe, p nie może być prawdziwe, bo otrzymalibyśmy fałszywą implikację. Z drugiej strony, prawdziwość q nie gwarantuje prawdziwości p , gdyż implikacja jest prawdziwa gdy jej poprzednik jest fałszywy.

Natomiast jeżeli implikacja $p \Rightarrow q$ jest prawdziwa i wiemy, że prawdziwy jest jej poprzednik, wystarcza to do stwierdzenia prawdziwości następnika (reguła odrywania): W implikacji $p \Rightarrow q$, p jest **warunkiem wystarczającym** q .

Reguły wnioskowania — sylogizm

Sylogizm: schemat wnioskowania oparty o dwie przesłanki zawierające wspólny element, a każdy element wniosku jest zawarty w dokładnie jednej przesłance.

Klasyczny sylogizm Arystotelesa

Jeżeli każdy M jest P oraz każdy P jest S, to każdy M jest S

można łatwo zinterpretować w języku teorii mnogości:

$$M \subset P \wedge P \subset S \Rightarrow M \subset S$$

Inny typ sylogizmu

$$\frac{\forall x \in A : P(x) \quad y \in A}{P(y)}$$

Przykład:

Wszyscy ludzie są śmiertelni.
Sokrates jest człowiekiem.

Sokrates jest śmiertelny.

Częsty błąd:

Wszystkie koty są śmiertelne.
Sokrates jest śmiertelny.

Sokrates jest kotem.



$$\frac{\forall x \in K : P(x) \quad P(s)}{s \in K}$$

To “rozumowanie” jest **niepoprawne!**

Przykład

Czy liczba 6405 jest podzielna przez 3?

Przesłanka większa: Cecha podzielności przez 3 — jeżeli suma cyfr liczby całkowitej jest podzielna przez 3, liczba jest podzielna przez trzy.

Przesłanka mniejsza: Suma cyfr liczby 6405 wynosi $6 + 4 + 0 + 5 = 15$, co jest podzielne przez 3.

Liczba 6405 jest podzielna przez trzy.

$$6405 : 3 = 2135.$$

Wyrażanie jednych operacji przez inne

Za pomocą negacji oraz dowolnej z trzech operacji logicznych: koniunkcji, alternatywy i implikacji, można zdefiniować dwie pozostałe operacje.

- za pomocą negacji i koniunkcji można zdefiniować alternatywę i implikację
- za pomocą negacji i alternatywy można zdefiniować koniunkcję i implikację
- za pomocą negacji i implikacji można zdefiniować alternatywę i koniunkcję

Zauważmy, że w każdym przypadku konieczna jest *negacja*.

Przykład

Zdefiniujmy alternatywę za pomocą negacji i koniunkcji:

$$\sim ((\sim p) \wedge (\sim q)) \Leftrightarrow p \vee q$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim ((\sim p) \wedge (\sim q))$	$p \vee q$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0

Operator NAND

Istnieją funktory, które *same* wystarczają do zdefiniowania pozostałych operacji logicznych: koniunkcji, alternatywy, implikacji *oraz* negacji.

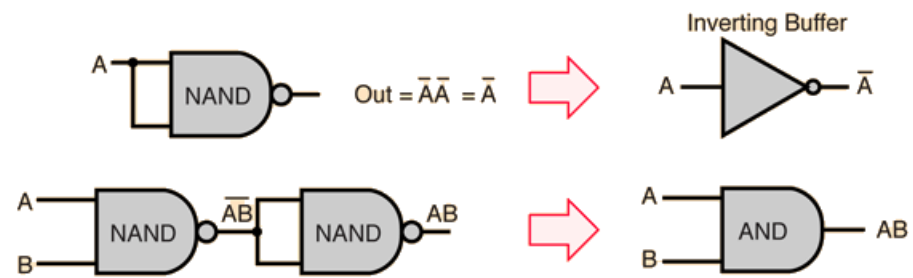
Operator NAND (dysjunkcja). Operator $p | q$ zdefiniowany jest przez poniższą tablicę prawdy:

p	q	$p q$
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Negacja i koniunkcja za pomocą NAND

p	$p p$	$\sim p$
1	0	0
0	1	1

p	q	$p q$	$(p q) (p q)$	$p \wedge q$
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0



Dwa inne operatory

Operator XOR (alternatywa wykluczająca). Operator $p \underline{\vee} q$ zdefiniowany jest przez poniższą tablicę prawdy:

p	q	$p \underline{\vee} q$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Zdanie $p \vee q$ czytamy “ p *lub* q ”

Zdanie $p \underline{\vee} q$ czytamy “ p *albo* q ”

Operator NOR. Operator $p \downarrow q$ zdefiniowany jest przez poniższą tablicę prawdy:

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

Operatory (funktory) NAND, XOR, NOR są szczególnie wygodne w projektowaniu i analizie elektronicznych obwodów logicznych, a więc także w analizie architektury procesorów.