Fizyka dla Firm — Matematyka

1. Zbiory i relacje

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

6 października 2022

Zbiór jest pojęciem pierwotnym matematyki. Można rozważać zbiory liczbowe, zbiory punktów, zbiory osób, zbiory obiektów fizycznych, na przykład wszystkich komputerów zainstalowanych w budynku przy ul. Łojasiewicza 11 w Krakowie, zbiór wszystkich gwiazd w naszej Galaktyce itp.

Zbiory mogą być skończone i nieskończone. Jeżeli element a należy do zbioru A, zapisujemy to $a \in A$. Zbiór, do którego nie nalezy żaden element, nazywamy zbiorem pustym i oznaczamy $\emptyset$.

Jeżeli zbiór jest skończony, możemy zdefiniować go poprzez podanie jego wszystkich elementów: na przykład $A = \{1, 2, 4, 5\}$ jest pewnym zbiorem czteroelementowym. Jeżeli zbiór jest nieskończony, niekiedy możemy go zdefiniować poprzez podanie kryterium określającego, czy dany element należy do tego zbioru. Jeżeli zdefiniujemy "D to zbiór wszystkich naturalnych potęg liczby 2", łatwo sprawdzimy, że zbiór ten jest nieskończony, że $64 \in D$, ale że $66 \notin D$; symbol $\notin$ odczytujemy "nie należy do".

Zdefiniowany powyżej zbiór D możemy formalnie zapisać jako

$$D = \{y \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} \colon y = 2^n\}$$

co czytamy "ogół takich naturalnych y, że istnieje naturalne n takie, że y jest n-tą potęgą 2".

Podzbiór

Mówimy, że zbiór B jest podzbiorem zbioru A, jeżeli każdy element zbioru B jest jednocześnie elementem zbioru A. Zbiór B jest nadzbiorem zbioru A. Każdy zbiór jest swoim własnym podzbiorem. Zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru. To ostatnie stwierdzenie wynika z rozważenia implikacji $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$. Poprzednik tej implikacji jest zawsze fałszywy, więc implikacja jest prawdziwa dla każdego zbioru A. Podzbiory, które są różne od całego zbioru i od zbioru pustego, nazywamy podzbiorami właściwymi.

Jeżeli B jest podzbiorem A, piszemy $A \subseteq B$. Jeżeli B jest podzbiorem A i jednocześnie A zawiera elementy nienależące do B, piszemy $B \subset A$.

Równość zbiorów

Dwa zbiory są sobie równe, jeśli $A \subset B$ oraz $B \subset A$, czyli z tego, że jakiś element należy do A wynika, że należy on także do B oraz z tego, że element należy do B wynika, że należy on także do A:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall a : (a \in A \Rightarrow a \in B) \land (a \in B \Rightarrow a \in A))$$

W zbiorach, w ogólności, nie jest zdefiniowana kolejność elementów, w związku z czym zbiory o takich samych elementach, ale podanych w różnej kolejności, uważamy za równe: $\{1, 2, 4, 5\} = \{5, 1, 2, 4\} = \{4, 2, 5, 1\}$ itd.

Suma zbiorów

Zbiór elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B, nazywamy sumą (sumą mnogościową) tych zbiorów: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

Przykład: Niech $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{5, 7, 9\}$. Wówczas $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 7, 9\}$.

Iloczyn zbiorów

Zbiór elementów, które należą do zbioru A oraz do zbioru B, nazywamy iloczynem (iloczynem mnogościowym, przecięciem) tych zbiorów: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Przykład: Dla zbiorów A, B zdefiniowanych powyżej, $A \cap B = \{5\}$. Zwróćmy uwagę, że liczba 5 występuje w zbiorze $A \cap B$ tylko raz.

Różnica zbiorów

Różnicą zbiorów A, B nazywamy zbiór takich elementów, które należą do A i nie należą do B. $A\backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$. Zauważmy, że $A\backslash B \neq B\backslash A$.

Przykład: Dla zbiorów A, B zdefiniowanych powyżej, $A\backslash B = \{1, 2, 4\}$, $B\backslash A = \{7, 9\}$.

Dopełnienie

Niech $A \subseteq U$. Zbiór $A' = U\backslash A$ nazywamy dopełnieniem zbioru A do zbioru U. Zbiór U niekiedy nazywa się w tym kontekscie “uniwersum”. Gdy mowa o dopełnieniach zbiorów, zawsze należy określić względem jakiego zbioru obliczamy dopełnienia.

Iloczyn kartezjański

Niech będą dane dwa zbiory A, B. Iloczynem kartezjańskim zbiorów A, B nazywamy zbiór wszystkich par takich, że pierwszy element należy do zbioru A, drugi do zbioru B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Uwaga: $A \times B \neq B \times A$.

Przyklad: Dla zbiorów A, B zdefiniowanych powyżej,

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1,5),(1,7),(1,9),(2,5),(2,7),(2,9) \\ &\quad (4,5),(4,7),(4,9),(5,5),(5,7),(5,9)\} \end{aligned}$$

Przyklad Rozważmy kartezjański układ współrzędnych. Każdemu punktowi osi OX możemy przypisać pewną liczbę rzeczywistą $x \in \mathbb{R}$. Podobnie, każdemu punktowi osi OY możemy również przypisać pewną liczbę rzeczywistą $y \in \mathbb{R}$. Dowolny punkt na płaszczyźnie możemy utożsamić z parą jego współrzędnych kartezjańskich (x, y). Widzimyw w ten sposób, że płaszczyzna jest kwadratem kartezjańskim zbioru liczb rzeczywistych

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

Relacje

Relacja w zbiorach A, B: podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times B$. Oznaczamy $\mathcal{R}(a, b), a \in A, b \in B$. Relację $\mathcal{R}'$ spełniającą własność $\forall x \in A\ y \in B : \mathcal{R}(a, b) \Rightarrow \mathcal{R}'(b, a)$ nazywam **relacją odwrotną** do relacji $\mathcal{R}$. Relacja odwrotna jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $B \times A$.

Relacja równoważności

Rozważamy relacje zachodzące w jednym zbiorze, $A \times A$.

Relacja zwrotna: $\forall x \in A : \mathcal{R}(x, x)$

Relacja symetryczna: $\forall x, y \in A : \mathcal{R}(x, y) \Rightarrow \mathcal{R}(y, x)$

Relacja przechodnia: $\forall x, y, z \in A : \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) \Rightarrow \mathcal{R}(x, z)$.

Relację, która jest jednocześnie zwrotna, symetryczna i przechodnia, nazywamy **relacją równoważności**.

Zbiór wszystkich $x \in A$, pomiędzy którymi zachodzi relacja równoważności, nazywamy **klasą abstrakcji** względem tej relacji. Przykłady: ułamki $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots, \frac{-1}{-2}, \dots$; wektory równoległe.

Przykład

Rozpatrzmy zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{Z}$. Jak można by *zdefiniować* liczby parzyste i nieparzyste?

Niech $x, y \in \mathbb{Z}$. Definiujemy relację $\mathcal{P}$ w ten sposób, że $\mathcal{P}(x, y) \Leftrightarrow (x - y)|\,2$ (ostatni napis oznacza, że różnica $x - y$ jest podzielna bez reszty przez 2. Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{P}$ jest relacją równoważnościową.

Liczby nieparzyste, to klasa abstrakcji względem relacji $\mathcal{P}$, do której należy liczba 1.
Liczby parzyste, to klasa abstrakcji względem relacji $\mathcal{P}$, do której należy liczba 2. ☺

Częściowy porządek

Relacja antysymetryczna: $\forall x, y \in A : \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) \Rightarrow x = y$.

Przykład: $x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$

Relację, która jest jednocześnie zwrotna, przechodnia i antysymetryczna nazywam relacją **słabego częściowego porządku**.

Porządek liniowy

Niech $\mathcal{R}$ będzie słabym częściowym porządkiem. Jeżeli zachodzi $\forall x, y \in A : \mathcal{R}(x, y) \vee \mathcal{R}(y, x)$, relację taką nazywam porządkiem liniowym. Dla każdej pary elementów, albo pierwszy jest "mniejszy" od drugiego, albo drugi jest "mniejszy" od pierwszego. Wobec tego *wszystkie* elementy zbioru można uporządkować względem tej relacji.

Relacja jednoznaczna

Jeżeli $\forall x \in A,\ y, z \in B : \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(x, z) \Rightarrow y = z$, relacja $\mathcal{R}$ jest **relacją jednoznaczną**: każdemu “argumentowi” odpowiada jeden i tylko jeden “wynik”. Relację jednoznaczną nazywa się także **funkcją** lub **odwzorowaniem**. Stosuje się wtedy zwyczajowy zapis uproszczony: jeżeli $\mathcal{R}$ jest relacją jednoznaczną, to $\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow y = f(x)$. Jeżeli *relacja odwrotna* do relacji jednoznacznej także jest jednoznaczna, relację taką nazywa się **relacją wzajemnie jednoznaczną**.

Bijekcja

$$\begin{aligned}
\forall x \in A \; \exists y \in B &: \mathcal{R}(x,y) \\
\forall y \in B \; \exists x \in A &: \mathcal{R}(x,y) \\
\forall x \in A,\; y,z \in B &: \mathcal{R}(x,y) \wedge \mathcal{R}(x,z) \Rightarrow y = z \\
\forall x,y \in A,\; z \in B &: \mathcal{R}(x,z) \wedge \mathcal{R}(y,z) \Rightarrow x = y
\end{aligned}$$

Bijekcja jest relacją (funkcją) wzajemnie jednoznaczną, odwzorowującą *cały* zbiór A *na* zbiór B. Relacja (funkcja) odwrotna odwzorowuje cały zbiór B na zbiór A. Jeżeli pomiędzy dwoma zbiorami A, B istnieje bijekcja, stwierdzamy, że zbiory te są równoliczne.

