Fizyka dla Firm
Matematyka I

20 lutego 2023

1. Znajdź wartości własne i unormowane, wzajemnie ortogonalne wektory własne macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1a}$$

tworzące bazę w $\mathbb{R}^3$, oraz wartości własne i unormowane, wzajemnie ortogonalne wektory własne macierzy $\mathbf{A}^{-1}$, jeżeli macierz $\mathbf{A}^{-1}$ istnieje.

Rozwiązanie: Jest to macierz symetryczna, rzeczywista, więc jej wartości własne są rzeczywiste, a wektory własne do *różnych* wartości własnych są ortogonalne.

Równaniem charakterystycznym jest

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \tag{1b}$$

Korzystając z odpowiedniego twierdzenia, łatwo sprawdzić, że $\lambda = 2$ jest całkowitym pierwiastkiem wielomianu (1b), gdyż $-2^3 + 3 \cdot 2 + 2 = 0$. Algorytm dzielenia wielomianu (1b) przez dwumian $(\lambda - 2)$ prowadzi do układu równań

$$b_2 = -1 \tag{1c}$$
$$-2b_2 + b_1 = 0 \tag{1d}$$
$$-2b_1 + b_0 = 3 \tag{1e}$$

skąd $b_2 = -1$, $b_1 = -2$, $b_0 = -1$, a zatem równanie charakterystyczne przybiera postać

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1) = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0\,. \tag{1f}$$

Ostatecznie widzimy, że wartościami własnymi macierzy (1a) są $\lambda = 2$ oraz $\lambda = -1$, przy czym ta druga jest dwukrotnie zdegenerowana.

2pkt

Przystępujemy do szukania wektorów własnych. Oznaczmy symbolicznie poszukiwany wektor przez $\mathbf{x} = [a, b, c]$. Bierzemy $\lambda = 2$ i wstawiamy do równania $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$:

$$-2a + b + c = 0 \tag{1g}$$
$$a - 2b + c = 0 \tag{1h}$$
$$a + b - 2c = 0 \tag{1i}$$

Wyznacznik główny tego układu — jak wiemy — wynosi 0, a rozwiązania zależą od jednego parametru: $a = b = c$. Po unormowaniu dostajemy

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{1j}$$

jako unormowany wektor własny macierzy (1a) do wartości własnej $\lambda = 2$.

1pkt

Teraz bierzemy $\lambda = -1$. Wszystkie trzy równania definiujące składowe wektora własnego redukują się do jednego równania:

$$a + b + c = 0 \tag{1k}$$

i możemy wziąć dowolne liczby spełniające ten warunek; zauważmy, że jest to warunek ortogonalności do wektora (1j), co nie powinno dziwić. Weźmy $b = -a$, $c = 0$, co po unormowaniu daje

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1l}$$

1pkt

Drugiego wektora własnego do wartości własnej $\lambda = -1$ musimy szukać jako wektora ortogonalnego do (1j) i liniowo niezależnego od (1l). *Wygodnie* jest przyjąć, że ten trzeci wektor własny jest także ortogonalny do (1l), czyli jego składowe muszą spełniać

$$a + b + c = 0 \tag{1m}$$
$$a - b = 0 \tag{1n}$$

Unormowanym rozwiązaniem jest

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \tag{1o}$$

1pkt

Wyznacznik macierzy $\mathbf{B}$ jest równy iloczynowi jej wartości własnych: $\det \mathbf{B} = 2^2 \cdot (-1) = -4 \neq 0$, a zatem macierz $\mathbf{B}^{-1}$ istnieje. Jej wartościami własnymi są odwrotności wartości własnych macierzy $\mathbf{B}$: $\mu = 1/2$ oraz $\mu = -1$ (podwójnie zdegenerowana). Wektory własne macierzy $\mathbf{B}^{-1}$ są takie same, jak wektory własne macierzy $\mathbf{B}$.

2pkt

2. Niech
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2i & i \\ -2i & 1 & 2i \\ -i & -2i & 1 \end{bmatrix} \tag{2a}$$

Znajdź rozkład spektralny macierzy $\mathbf{B}$.

Rozwiązanie: Macierz (2a) jest hermitowska, więc jej rozkład spektralny (rozwinięcie spektralne) łatwo jest znaleźć

Aby znaleźć wartości własne macierzy (2a), konstruuję jej wielomian charakterystyczny:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2i & i \\ -2i & 1-\lambda & 2i \\ -i & -2i & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = -(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda+2) \tag{2b}$$

Wartościami własnymi są $\lambda = 1,\ 4,\ -2$.

1 pkt

Oznaczmy wektor własny przez $[a, b, c]$. Biorąc kolejne wartości własne otrzymujemy:

$\lambda = 1$:

$$2ib + ic = 0 \tag{2c}$$
$$-2ia + 2ic = 0 \tag{2d}$$
$$-ia - 2ib = 0 \tag{2e}$$

skąd $a = c, b = -\frac{1}{2}c$, a po unormowaniu

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2f}$$

1 pkt

$\lambda = 4$:

$$-3a + 2ib + ic = 0 \tag{2g}$$
$$-2ia - 3b + 2ib = 0 \tag{2h}$$
$$-ia - 2ib - 3c = 0 \tag{2i}$$

skąd $a = \frac{1}{5}(-4+3i)c, b = \frac{1}{5}(2+6i)c$, a po unormowaniu

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{90}}\begin{bmatrix} -4+3i \\ 2+6i \\ 5 \end{bmatrix} \tag{2j}$$

1 pkt

$\lambda = -2$:

$$\begin{aligned} 3a + 2ib + ic &= 0 && \text{(2k)} \\ -2ia + 3b + 2ib &= 0 && \text{(2l)} \\ -ia - 2ib + 3c &= 0 && \text{(2m)} \end{aligned}$$

Jeśli pomnożyć te równania stronami przez (-1), widać, że różnią się one od równań na $\mathbf{e}_2$ tylko znakiem i. Wobec tego

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{90}} \begin{bmatrix} -4-3i \\ 2-6i \\ 5 \end{bmatrix} \tag{2n}$$

1 pkt

Zgodnie z twierdzeniem spektralnym,

$$\mathbf{B} = 1 \cdot \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\dagger + 4 \cdot \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^\dagger + (-2) \cdot \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^\dagger \tag{2o}$$

Trzeba jeszcze znaleźć jawne postaci operatorów rzutowych występujących w (2o).

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\dagger &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} && \text{(2p)} \end{aligned}$$

1 pkt

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^\dagger &= \frac{1}{90} \begin{bmatrix} -4+3i \\ 2+6i \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4-3i & 2-6i & 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 5 & 2+6i & -4+3i \\ 2-6i & 8 & 2+6i \\ -4-3i & 2-6i & 5 \end{bmatrix} && \text{(2q)} \end{aligned}$$

1 pkt

$$\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^\dagger = \frac{1}{90}\begin{bmatrix} -4-3i \\ 2-6i \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4+3i & 2+6i & 5 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 5 & 2-6i & -4-3i \\ 2+6i & 8 & 2-6i \\ -4+3i & 2+6i & 5 \end{bmatrix} \tag{2r}$$

1 pkt

Ostatecznie

$$\mathbf{B} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$+ \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 5 & 2+6i & -4+3i \\ 2-6i & 8 & 2+6i \\ -4-3i & 2-6i & 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 2-6i & -4-3i \\ 2+6i & 8 & 2-6i \\ -4+3i & 2+6i & 5 \end{bmatrix} \tag{2s}$$

3. Zbadaj przebieg zmienności (dziedzina, granice na krańcach dziedziny, parzystość i okresowość, jeśli dotyczy, asymptoty, jeśli istnieją, pochodna, przedziały monotoniczności, ekstrema — charakter i wartości) funkcji

$$g(x) = \frac{x^5}{(x-1)^4} \tag{3a}$$

Rozwiązanie: Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych bez zera mianownika, $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Funkcja nie jest okresowa ani nie ma określonej parzystości.

1 pkt

Granice na przedziałach określoności:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5}{(x-1)^4} = \pm\infty \tag{3b}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5}{(x-1)^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \tag{3c}$$

Prosta $x = 1$ jest asymptotą pionową funkcji.

1 pkt

Ponieważ

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{x^5}{(x-1)^4} = 1 \tag{3d}$$

asymptota ukośna w $\pm\infty$ ma postać $y = x + b$. Aby znaleźć b, obliczam granicę

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^5}{(x-1)^4} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5 - x(x-1)^4}{(x-1)^4} = \dots \tag{3e}$$

$$(x-1)^4 = \sum_{n=0}^{4} \binom{4}{n} x^{4-n}(-1)^n = x^4 - 4x^3 + O(x^2) \tag{3f}$$

$$\dots = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5 - x^5 + 4x^4 + O(x^3)}{(x-1)^4} = 4 \tag{3g}$$

prosta $y = x + 4$ jest asymptotą ukośną funkcji w $\pm\infty$.

1 pkt

Pochodna:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{5x^4(x-1)^4 - x^5\cdot 4(x-1)^3}{(x-1)^8} = \frac{x^4(x-1)^3(5(x-1)-4x)}{(x-1)^8} \\ &= \frac{x^4(x-5)}{(x-1)^5} \end{aligned} \tag{3h}$$

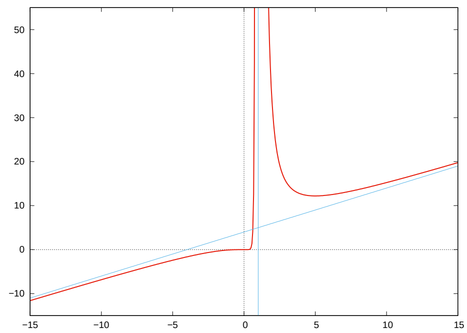
1 pkt

Miejscami zerowymi pochodnej są $x = 0$, $x = 5$, a przedziały monotoniczności — i wynikające z nich zachowanie funkcji w otoczeniu miejsc zerowych pochodnej — określa następująca tabela:

x	x^4	$(x-1)^5$	$x-5$	$g'(x)$	$g(x)$
$-\infty < x < 0$	$+$	$-$	$-$	$+$	rosnąca
0	0			0	punkt przegięcia $= 0$
$0 < x < 1$	$+$	$-$	$-$	$+$	rosnąca
$1 < x < 5$	$+$	$+$	$-$	$-$	malejąca
5	$+$	$+$	0	0	minimum $= 3125/256$ $\simeq 12.2$
$x < 5 < +\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	rosnąca

W otoczeniu $x = 0$ pochodna nie zmienia znaku, a więc nie ma tam ekstremum. W otoczeniu $x = 5$ pochodna zmienia znak z ujemnej na dodatnią, a więc jest tam minimum.

3 pkt



4. Zbadaj przebieg zmienności (patrz wyjaśnienie powyżej) funkcji

$$f(x) = x^{-\frac{1}{x}} \tag{4a}$$

Rozwiązanie: Ponieważ podstawa potęgi musi być dodatnia, dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$. Funkcja nie ma określonej parzystości ani nie jest okresowa.

1 pkt

W celu obliczenia granic, przedstawmy funkcję (4a) w postaci

$$f(x) = x^{-\frac{1}{x}} = \exp\left(\ln\left(x^{-\frac{1}{x}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\ln x}{x}\right) \tag{4b}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \exp\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = \exp\left(-\frac{-\infty}{0^+}\right) = \exp(+\infty) = +\infty \tag{4c}$$

Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową badanej funkcji.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{4d}$$

gdzie skorzystaliśmy z reguły de l'Hospitala. Wobec tego

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = \exp(-0) = 1 \tag{4e}$$

Prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą funkcji w $+\infty$.

2 pkt

Pochodna:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\exp\left(-\frac{\ln x}{x}\right)\right)' = \exp\left(-\frac{\ln x}{x}\right) \cdot \frac{-\frac{1}{x}\cdot x + 1 \cdot \ln x}{x^2} \\ &= \exp\left(-\frac{\ln x}{x}\right) \cdot \frac{\ln x - 1}{x^2} \end{aligned} \tag{4f}$$

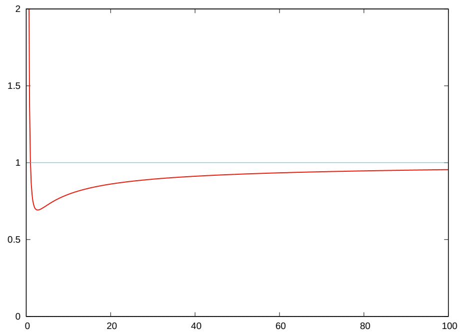
2 pkt

Znak pochodnej $f'(x)$ zależy od znaku wyrażenia $\ln x - 1$ (mianownik i eksponenta są dodatnie). Wobec tego

$0 < x < e$	$f'(x) < 0$	funkcja malejąca
$x = e$	$f'(x) = 0$	ekstremum
$x > e$	$f'(x) > 0$	funkcja rosnąca

Ponieważ w $x = e$ funkcja zmienia się z malejącej w rosnącą, punkt $x = e$ oznacza minimum o wartości $f_{\min} = e^{-\frac{1}{e}} \simeq 0.6923$.

2 pkt



Za każde zadanie można otrzymać 0–7 punktów. Zakres ocen wygląda jak następuje:

punkty	ocena
$\leqslant 15$	ndst
16–17	dst
18–20	+dst
21–23	db
24–26	+db
27–28	bdb

PFG