Fizyka dla firm
Egzamin

P. F. Góra

20,26 czerwca 2023

1. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \sin^4 x\, dx\,. \tag{1a}$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\, dx &= \int (-\cos x)' \sin^3 x\, dx = -\cos x\, \sin^3 x - \int (-\cos x)\cdot 3\sin^2 x\, \cos x\, dx \\
&= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x\, \cos^2 x\, dx \\
&= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x (1-\sin^2 x)\, dx \\
&= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x\, dx - 3\int \sin^4 x\, dx \qquad (1b) \\
4\int \sin^4 x\, dx &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x\, dx \qquad (1c) \\
\int \sin^4 x\, dx &= \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\sin x \cos x - \frac{1}{4}\sin^3 x \cos x \qquad (1d)
\end{aligned}$$

przy czym fakt, że

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) \tag{1e}$$

można uznać za znany lub też tę całkę można policzyć przez części.

2. Oblicz całkę oznaczoną

$$\int\limits_0^\infty \frac{s}{1+s^3}\,ds\,. \tag{2a}$$

Rozwiązanie: Dla wygody najpierw obliczymy całkę nieoznaczoną. Zrobimy to za pomocą rozkładu na ułamki proste.

$$\frac{s}{1+s^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2-s+1} = \frac{A(s^2-s+1)+(Bs+C)(s+1)}{(s+1)(s^2-s+1)} \tag{2b}$$

Uzgadniając współczynniki dostajemy $A=-1/3$, $B=C=1/3$. Zatem

$$\begin{aligned}
\int \frac{s}{1+s^3}\,ds &= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+s}\,ds + \frac{1}{3}\int \frac{s+1}{s^2-s+1}\,ds \\
&= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+s}\,ds + \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2s-1)+\frac{1}{2}+1}{s^2-s+1}\,ds \\
&= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+s}\,ds + \frac{1}{6}\int \frac{2s-1}{s^2-s+1}\,ds + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{1}{s^2-s+1}\,ds \\
&= -\frac{1}{3}\ln|s+1| + \frac{1}{6}\ln(s^2-s+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,ds \\
&= \left[\begin{array}{c} s-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}u \\ ds=\frac{\sqrt{3}}{2}\,du \end{array}\right] = \frac{1}{6}\ln\frac{s^2-s+1}{s^2+2s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= \frac{1}{6}\ln\frac{s^2-s+1}{s^2+2s+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2s-1}{\sqrt{3}}
\end{aligned} \tag{2c}$$

Pierwszy człon daje 0 w granicach $0, +\infty$. Z drugiego członu

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty \frac{s}{1+s^3}\,ds &= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2s-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned} \tag{2d}$$

3. Znajdź moment bezwładności jednorodnego walca eliptycznego o masie m, wysokości h i podstawie opisanej równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{3a}$$

względem osi przechodzącej przez środek walca i zawierającej oś "z".

Rozwiązanie: Moment bezwładności wynosi

$$I = \iiint\limits_W \rho d^2\, dx\, dy\, dz \tag{3b}$$

gdzie d^2 jest kwadratem odległości elementu objętości od wybranej osi, ρ jest gęstością, a całkowanie rozciąga się po całej objętości walca. $\rho = m/V$, trzeba więc najpierw obliczyć objętość V walca:

$$V = \iiint\limits_W dx\, dy\, dz \tag{3c}$$

Wprowadzam współrzędne eliptyczno-walcowe:

$$\begin{cases} x &= ar\cos\phi \\ y &= br\sin\phi \\ z &= z \end{cases} \tag{3d}$$

przy czym $r \in [0,1]$, $\phi \in [0,2\pi]$, $z \in [-h/2, h/2]$. Jakobian przekształcenia (3d) wynosi $J = abr$. Zatem

$$V = ab\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 r\, dr \int\limits_{-h/2}^{h/2} dz = \pi abh \tag{3e}$$

$$\rho = \frac{m}{\pi abh} \tag{3f}$$

We współrzędnych (3d) odległość od osi z wynosi $d^2 = x^2 + y^2 = a^2r^2\cos^2\phi + b^2r^2\sin^2\phi$. Wobec tego moment bezwładności wynosi

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{\pi abh}\cdot ab \int\limits_{-h/2}^{h/2} dz \int\limits_0^1 r\cdot r^2\, dr \int\limits_0^{2\pi} (a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)\, d\phi \\ &= \frac{m}{\pi}\cdot h\cdot \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 \cdot \int\limits_0^{2\pi} (a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)\, d\phi \\ &= \frac{1}{4}m\left[a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\phi\, d\phi + b^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\phi\, d\phi\right] = \frac{1}{2}m\frac{a^2+b^2}{2}\,, \end{aligned} \tag{3g}$$

gdyż $\int\cos^2\phi\, d\phi = \frac{1}{2}(x + \sin\phi\cos\phi)$, $\int\sin^2\phi\, d\phi = \frac{1}{2}(x - \sin\phi\cos\phi)$.

4. Znajdź punkty, w których mogą znajdować się ekstrema funkcji

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}\,, \tag{4a}$$

przy czym zakładamy, że $xyz \neq 0$, gdyż w przeciwnym razie funkcja nie jest określona. Sklasyfikuj te punkty badając macierz drugich pochodnych cząstkowych.

Rozwiązanie: Obliczam pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{4x^2} \tag{4b}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} \tag{4c}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} \tag{4d}$$

Przyrównując $\partial f/\partial x$ do zera dostaję

$$4x^2 = y^2 \;\Rightarrow\; y = \pm 2x \tag{4e}$$

Podstawiając to do wyrażenia na $\partial f/\partial y$ i przyrównując je do zera otrzymuję

$$\frac{z^2}{4x^2} = \pm 1 \tag{4f}$$

Znak "$-$" nie ma sensu, gdyż lewa strona (4f) jest nieujemna. Zatem w (4e) dostaję $y = 2x$ oraz

$$z^2 = 4x^2 \;\Rightarrow\; z = \pm 2x \tag{4g}$$

Wreszcie podstawiając do $\partial f/\partial z$ dostaję

$$\frac{1}{2x^2} = \pm 2 \tag{4h}$$

i znów znak "$-$" nie ma sensu. Ostatecznie $x^2 = 1/4$, a zatem możliwymi punktami, w których znajdują się ekstrema, są $P_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$, $P_2 = \left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$.

W celu sprawdzenia, co jest minimum, co jest maksimum, obliczam drugie pochodne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{2x^3} \tag{4i}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -\frac{y}{2x^2} \tag{4j}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = 0 \tag{4k}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} \tag{4l}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = -\frac{2z}{y^2} \tag{4m}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \tag{4n}$$

Wobec tego hessiany

$$\mathbf{H}_{P_1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{P_2} = -\mathbf{H}_{P_1} \tag{4o}$$

Niestety, macierz $\mathbf{H}_{P_1}$ jest "brzydka", to znaczy nie ma wymiernych wartości własnych. Gdyby ktoś jednak dotarł do tego punktu, zaliczyłbym zadanie.

Macierz $\mathbf{H}_{P_1}$ jest dodatnio określona, więc w punkcie P_1 jest minimum, a w P_2 maksimum badanej funkcji.

5. Znajdź normę macierzy

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \tag{5a}$$

indukowaną przez euklidesowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$.

Rozwiązanie I: Zauważmy, że $\mathbf{B}^T = -\mathbf{B}$, a wobec tego macierz $\mathbf{D} = i\mathbf{B}$ jest macierzą hermitowską:

$$\mathbf{D}^\dagger = (i\mathbf{B})^\dagger = i^*\mathbf{B}^T = -i \cdot (-\mathbf{B}) = i\mathbf{B} = \mathbf{D} \tag{5b}$$

Ponieważ

$$\|\mathbf{D}\| = \|i\mathbf{B}\| = |i| \cdot \|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{B}\| \tag{5c}$$

zamiast normy $\mathbf{B}$ można policzyć normę $\mathbf{D}$, tę zaś, przy euklidesowym iloczynie skalarnym, znajdujemy jako największy moduł jej wartości własnej. Ponadto

$$\mathbf{Dx} = \lambda\mathbf{x} \tag{5d}$$

$$i\mathbf{Bx} = \lambda\mathbf{x} \tag{5e}$$

$$\mathbf{Bx} = -i\lambda\mathbf{x} \tag{5f}$$

To ostatnie równanie jest równaniem własnym $\mathbf{B}$, do wartości własnej $\gamma = -i\lambda$. $|\gamma| = |\lambda|$. Ostatecznie, dzięki własności $\mathbf{B}^T = -\mathbf{B}$,

$$\|\mathbf{B}\| = \max|\gamma_i| \tag{5g}$$

gdzie γ_i są wartościami własnymi $\mathbf{B}$.

W celu znalezienia wartości własnych macierzy (5a) obliczamy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} -\gamma & 1 & 2 \\ -1 & -\gamma & 3 \\ -2 & -3 & -\gamma \end{vmatrix} = -\gamma^3 - 14\gamma \tag{5h}$$

a wobec tego wartościami własnymi macierzy (5a) są liczby $0, \pm i\sqrt{14}$. Tak więc $\|\mathbf{B}\| = \sqrt{14}$.

Rozwiązanie II: Zadanie to można też rozwiązać "tradycyjnie", znajdując maksimum wyrażenia $\|\mathbf{Bx}\|$ przy warunku $\|\mathbf{x}\| = 1$, co, z uwagi na wypukłość funkcji kwadratowej, jest równoważne znalezieniu maksimum wyrażenia $\|\mathbf{Bx}\|^2$ przy warunku $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$.

Niech $\mathbf{x} = [a, b, c]$, $\|\mathbf{x}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

$$\mathbf{Bx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b + 2c \\ -a + 3c \\ -2a - 3b \end{bmatrix} \tag{5i}$$

$\|\mathbf{Bx}\|^2 = (b + 2c)^2 + (-a + 3c)^2 + (-2a - 3b)^2 = 5a^2 + 10b^2 + 13c^2 + 12ab - 6ac + 4bc$. Tworzymy funkcjonał

$$\mathcal{L} = 5a^2 + 10b^2 + 13c^2 + 12ab - 6ac + 4bc - \lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 1) \tag{5j}$$

a następnie przyrównujemy poszczególne pochodne cząstkowe $\mathcal{L}$ do zera:

$$10a + 12b - 6c - 2\lambda a = 0 \tag{5k}$$

$$20b + 12a + 4c - 2\lambda b = 0 \tag{5l}$$

$$26c - 6a + 4b - 2\lambda c = 0 \tag{5m}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \tag{5n}$$

Równania (5k),(5l),(5m) tworzą jednorodny układ liniowy na zmienne a, b, c. Aby układ ten mógł mieć niezerowe rozwiązanie, jego wyznacznik główny musi znikać. Zatem

$$\left| \begin{matrix} 10 - 2\lambda & 12 & -6 \\ 12 & 20 - 2\lambda & 4 \\ -6 & 4 & 26 - 2\lambda \end{matrix} \right] = -8\lambda^3 + 224\lambda^2 - 1568\lambda = -8\lambda(\lambda - 14)^2 = 0 \tag{5o}$$

Jeśli $\lambda = 0$, tylko dwa z równań (5k),(5l),(5m) są niezależne. Bierzemy

$$\begin{aligned} 10a + 12b - 6c &= 0 \\ 12a + 20b + 4c &= 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \end{aligned} \tag{5p}$$

skąd $a = \pm 3/\sqrt{14}$, $b = \mp 2/\sqrt{14}$, $c = \pm 1/\sqrt{4}$, $\|\mathbf{Bx}\|^2 = 0$.
Jeśli $\lambda = 14$, tylko jedno z równań (5k),(5l),(5m) jest niezależne. Bierzemy

$$\begin{aligned} -18a + 12b - 6c &= 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \end{aligned} \tag{5q}$$

skąd $c = -3a + 2b$, warunek zaś sprowadza się do wyrażenia $10a^2 - 12ab + 5b^2 = 1$. Podstawiając za c do wyrażenia na $\|\mathbf{Bx}\|^2$ otrzymujemy

$$\|\mathbf{Bx}\|^2 = 14(10a^2 - 12ab + 5b^2) = 14 \tag{5r}$$

a więc ostatecznie

$$\|\mathbf{B}\| = \sqrt{14} \tag{5s}$$

jak w (prostszym) Rozwiązaniu I.

Zadania dodatkowe

6. Dany jest nieskończony, sferycznie symetryczny obłok gazu, którego gęstość jako funkcja odległości od centrum obłoku wynosi

$$\rho(r) = \rho_0 \exp(-r/r_0)\,, \tag{6a}$$

gdzie $\rho_0 > 0$, $r_0 > 0$. Znajdź potencjał grawitacyjny wytwarzany przez obłok w odległości L od jego centrum.

Rozwiązanie:

$$V = -\iiint \frac{G\rho(r)}{l}\,dx\,dy\,dz \tag{6b}$$

gdzie l jest odległością od punktu, w którym obliczamy pole.

Badany punkt umieszczam na osi OZ, w odległości L od środka — mogę ten punkt umieścić *gdziekolwiek*, byle w odległości L od środka, umieszczam go więc tak, aby mi było wygodnie.

Z uwagi na symetrię sferyczną wprowadzamy współrzędne

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta\cos\phi \\ y &= r\cos\theta\sin\phi \\ z &= r\sin\theta \end{cases} \tag{6c}$$

gdzie $r \in [0,\infty), \theta \in [-\pi/2,\pi/2], \phi \in [0,2\pi]$. Jakobian przekształcenia wynosi $|J| = r^2\cos\theta$.

Mam zatem

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{x^2+y^2+(z-L)^2} \\ &= \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + (r\sin\theta - L)^2} \\ &= \sqrt{r^2 - 2Lr\sin\theta + L^2} \end{aligned} \tag{6d}$$

W tych zmiennych potencjał

$$V = -G\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \rho(r)\,dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{r^2-2Lr\sin\theta+L^2}}\,d\theta \tag{6e}$$

Obliczam

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{r^2-2Lr\sin\theta+L^2}}\,d\theta &= \left| \begin{array}{c} r^2-2Lr\sin\theta+L^2 = u \\ -2Lr\cos\theta\,d\theta = du \\ -\pi/2 \to r^2+2Lr+L^2 = (r+L)^2 \\ \pi/2 \to r^2-2lr+L^2 = (r-L)^2 \end{array} \right| \\ &= -\frac{r^2}{2Lr}\int_{(r+L)^2}^{(r-L)^2} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= -\frac{r}{L}\sqrt{u}\Big|_{(r+L)^2}^{(r-L)^2} \\ &= -\frac{r}{L}\left(\sqrt{(r-L)^2} - \sqrt{(r+L)^2}\right) \end{aligned} \tag{6f}$$

Wobec tego

$$V = \frac{2\pi G}{L}\int_0^{\infty} r\,\rho(r)\left(\sqrt{(r-L)^2} - \sqrt{(r+L)^2}\right)dr \tag{6g}$$

Ponieważ $\sqrt{(r-L)^2} = |r-L|$, całkę po dr musimy rozbić na sumę $\int_0^\infty = \int_0^L + \int_L^\infty$, gdyż w punkcie $r = L$ wyrażenie pod wartością bezwzględną zmienia znak. Mamy

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi G}{L}\int\limits_0^L (|r-L| - (r+L))r\,\rho(r)\,dr \\ &+ \frac{2\pi G}{L}\int\limits_L^\infty (|r-L| - (r+L))r\,\rho(r)\,dr \\ &= \frac{2\pi G}{L}\left[\int\limits_0^L (L-r-r-L))r\,\rho(r)\,dr + \int\limits_L^\infty (r-L-r-L))r\,\rho(r)\,dr\right] \\ &= -\frac{4\pi G}{L}\left[\int\limits_0^L r^2\rho(r)\,dr + L\int\limits_L^\infty r\,\rho(r)\,dr\right] \end{aligned} \tag{6h}$$

Dopiero na tym etapie korzystamy z jawnej postaci gęstości $\rho(r)$ danej przez (6a).

$$\begin{aligned} V &= -\frac{4\pi G\rho_0}{L}\left[\int\limits_0^L r^2\exp(-r/r_0)\,dr + L\int\limits_L^\infty r\,\exp(-r/r_0)\,dr\right] \\ &= \left[\begin{array}{l} \frac{r}{r_0} = s \\ dr = r_0\,ds \\ 0 \to 0 \\ L \to L/r_0 \\ \infty \to \infty \end{array}\right] \\ &= -\frac{4\pi G\rho_0}{L}\left[r_0^3\int\limits_0^{L/r_0} s^2e^{-s}\,ds + Lr_0^2\int\limits_{L/r_0}^\infty se^{-s}\,ds\right] \end{aligned} \tag{6i}$$

Całki nieoznaczone możemy policzyć przez części:

$$\int se^{-s}\,ds = -e^{-s}(s+1) \tag{6j}$$

$$\int s^2e^{-s}\,ds = -e^{-s}(s^2+2s+2) \tag{6k}$$

Po obliczeniu całek oznaczonych i uporządkowaniu wyrazów,

$$V(L) = -4\pi G\rho_0 r_0^2\left[\left(1+\frac{L}{r_0}\right)^2 e^{-L/r_0} + \frac{r_0}{L}\left(1-e^{-L/r_0}\right)\right]. \tag{6l}$$

7. Liczbę $a > 0$ podziel na trzy nieujemne części tak, aby ich iloczyn był największy.

   Rozwiązanie I: Niech
$$a = x + y + z\,, \tag{7a}$$
   $a, x, y, z > 0$. Mamy znaleźć największą wartość iloczynu
$$\mathcal{I} = xyz \tag{7b}$$
   przy warunku (7a). Tworzymy funkcjonał Lagrange'a
$$\mathcal{L} = xyz - \lambda(x + y + z - a)\,, \tag{7c}$$
   obliczamy jego pochodne cząstkowe i przyrównujemy je do zera. Otrzymujemy układ równań
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = yz - \lambda = 0\,, \tag{7d}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = xz - \lambda = 0\,, \tag{7e}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = xy - \lambda = 0\,. \tag{7f}$$
   Wyliczając λ z (7d) i wstawiając do (7e) dostajemy
$$yz = xz \tag{7g}$$
   skąd albo $z = 0$, ale to nie może zachodzić, gdyż wówczas $\lambda = 0$, co prowadzi do $x = y = z = 0$, co jest sprzeczne z warunkami zadania ($x + y + z = 0 \neq a > 0$), albo też
$$y = z\,. \tag{7h}$$
   Rozumując podobnie i korzystając z (7d),(7f) dochodzimy do wniosku, że
$$x = z \tag{7i}$$
   i ostatecznie
$$x = y = z\,. \tag{7j}$$
   Po wstawieniu do (7a) otrzymujemy $x = y = z = a/3$, $\mathcal{I}_{\max} = a^3/27$.

   Rozwiązanie II: Z uwagi na to, że warunek (7a) jest **liniowy**, zadanie to możemy rozwiązać także eliminując jedną zmienną z warunku:
$$z = a - x - y\,, \tag{7k}$$
$$\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{I}_{z=a-x-y} = xy(a - x - y) = axy - x^2y - xy^2 \tag{7l}$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = ay - 2xy - y^2 = y(a - 2x - y) \;\Rightarrow y = 0 \vee 2x + y = a\,, \tag{7m}$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = ax - x^2 - 2xy = x(a - x - 2y) \;\Rightarrow x = 0 \vee x + 2y = a \tag{7n}$$
   Otrzymujemy zatem punkty $(0, a)$, $(a, 0)$, $(a/3, a/3)$. W celu ich sklasyfikowania obliczam drugie pochodne cząstkowe:
$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} = -2x \tag{7o}$$
$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^y} = -2y \tag{7p}$$
$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x\, \partial y} = a - 2x - 2y \tag{7q}$$

Hessiany:

$$\mathbf{H}_{(0,a)} = a \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{(a,0)} = a \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \tag{7r}$$

W obu przypadkach wartościami własnymi są $-a \pm \sqrt{2}a$ — jedna z nich jest ujemna, druga dodatnia, a więc są to punkty siodłowe.

$$\mathbf{H}_{(a/3,a/3)} = -\frac{a}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7s}$$

W tym wypadku wartościami własnymi są $-a/3, -a$. Obie są ujemne, a więc ten punkt odpowiada maksimum.

Ostatecznie $x = y = a/3$, z czego wynika, że również $z = a/3$.

8. Znajdź normę macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \tag{8a}$$

indukowaną przez euklidesowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$.

Rozwiązanie: Macierz (8a) nie ma symetrii, które łatwo dałyby sprowadzić to zadanie do problemu poszukiwania wartości własnych. Wobec tego zadanie rozwiązujemy znajdując maksimum wyrażenia $\|\mathbf{Ax}\|$ przy warunku $\|\mathbf{x}\| = 1$, co, z uwagi na wypukłość funkcji kwadratowej, jest równoważne znalezieniu maksimum wyrażenia $\|\mathbf{Ax}\|^2$ przy warunku $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$.

Niech $\mathbf{x} = [a, b, c]$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a + b + c \\ -a + 4b + c \\ -a - b + 4c \end{bmatrix} \tag{8b}$$

$$\mathcal{N}^2 = \|\mathbf{Ax}\|^2 = 18a^2 + 2ab - 2ac + 18b^2 + 2bc + 18c^2 \tag{8c}$$

Tworzę funkcjonał Lagrange'a

$$\mathcal{L} = \mathcal{N}^2 - \lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 1)\,. \tag{8d}$$

Różniczkuję $\mathcal{L}$ po a, b, c, przyrównuję pochodne cząstkowe do zera i otrzymuję układ równań

$$\begin{cases} (18-\lambda)a + b - c & = 0 \\ a + (18-\lambda)b + c & = 0 \\ -a + b + (18-\lambda)c & = 0 \end{cases} \tag{8e}$$

Układ równań (8e) może mieć niezerowe rozwiązanie tylko jeśli jego wyznacznik główny jest równy zero. Oznaczając $18 - \lambda = z$ otrzymuję

$$0 = \begin{vmatrix} z & 1 & -1 \\ 1 & z & 1 \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = z^3 - 3z - 2 = (z+1)^2(z-2)\,. \tag{8f}$$

Po wstawieniu $z = 2$ do (8e) tylko dwa z tych równań stają się niezależne:

$$\begin{cases} 2a + b - c & = 0 \\ a + 2b + c & = 0 \end{cases} \tag{8g}$$

skąd $a = c$, $b = -c$, a po skorzystaniu z warunku $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ otrzymujemy $a = c = \pm 1/\sqrt{3}$, $b = \mp 1/\sqrt{3}$, więc

$$\mathcal{N}^2 = 18(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 16\,. \tag{8h}$$

Warunek $z = -1$ sprawia, że tylko jedno z równań (8e) jest niezależne i prowadzi do $b = a + c$. Zauważmy, że wobec tego

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (a+c)^2 + b^2 = 2a^2 + 2ac + 2c^2\,, \tag{8i}$$

a po wstawieniu do wyrażenia na $\mathcal{N}^2$ otrzymujemy

$$\mathcal{N}^2 = 18(a^2 + b^2 + c^2) + 2a^2 + 2ac + 2c^2 = 18 + 1 = 19 > 16\,. \tag{8j}$$

Ostatecznie

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathcal{N}^2_{\max}} = \sqrt{19}\,. \tag{8k}$$

PFG