Fizyka dla firm
Egzamin

P. F. Góra

15 września 2023

1. Znajdź normę macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1a}$$

indukowaną przez euklidesowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$.

<u>Rozwiązanie I</u>: Aby znaleźć $\|\mathbf{A}\|$, należy znaleźć maksimum $\|\mathbf{Ax}\|$ przy warunku $\|\mathbf{x}\| = 1$, co z uwagi na wypukłość funkcji kwadratowej, oznacza, że wystarczy znaleźć maksimum $\|\mathbf{Ax}\|^2$ przy warunku $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$. Niech $\mathbf{x} = [a, b, c]$. Mamy

$$\mathcal{N}^2 = \left\| \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\|^2 = 5a^2 - 2ac + 6b^2 + 5c^2 \tag{1b}$$

$$\mathcal{L} = 5a^2 - 2ac + 6b^2 + 5c^2 - \lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 1) \tag{1c}$$

Obliczam $\partial\mathcal{L}/\partial a$, $\partial\mathcal{L}/\partial b$, $\partial\mathcal{L}/\partial c$, przyrównuję je do zera i otrzymuję układ równań

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1d}$$

(1d) jest *jednorodnym* układem równań liniowych na a, b, c. Aby zadanie miało rozwiązanie, (1d) musi mieć rozwiązanie niezerowe, co jest możliwe jedynie gdy wyznacznik główny znika. To zaś zachodzi dla $\lambda = 6$ lub $5 - \lambda = \pm 1$.

Jeśli $\lambda = 6$, $b = \pm 1$, $a = c = 0$, natomiast $\mathcal{N}^2 = 6$.

Jeśli $5 - \lambda = 1$, to $b = 0$, $a = c = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$, $\mathcal{N}^2 = 4$.

Jeśli $5 - \lambda = -1$, to $b = 0$, $a = -c = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$, $\mathcal{N}^2 = 6$.

Ostatecznie $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathcal{N}^2_{\max}} = \sqrt{6}$.

<u>Rozwiązanie II</u>: Można też skorzystać z faktu, że $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\left\|\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right\|^2}$, przy czym macierz $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ jest symetryczna i nieujemnie określona, a więc jej normę znajdujemy jako jej największą wartość własną.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{1e}$$

$$\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (6-\lambda)((5-\lambda)^2 - 1) = -(\lambda - 6)^2(\lambda - 4) \tag{1f}$$

Największą wartością własną, dwukrotnie zdegenerowaną, jest $\lambda = 6$, wobec czego $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{6}$.

2. Oblicz całkę

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx\,. \tag{2a}$$

Rozwiązanie I:

$$I = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \begin{bmatrix} \ln x = t \\ x = e^t \\ dx = e^t\, dt \\ 1 \to 0 \\ \infty \to \infty \end{bmatrix} = \int_0^\infty \frac{t}{\left(e^t\right)^2}\, e^t\, dt = \int_0^\infty t\, e^{-t}\, dt\,. \tag{2b}$$

Całkę nieoznaczoną $\int t\, e^{-t}\, dt$ obliczę przez części:

$$\int t\, e^{-t}\, dt = \int t\left[-e^{-t}\right]'\, dt = -t\, e^{-t} - \int 1\cdot\left(-e^{-t}\right) dt = -t\, e^{-t} - e^{-t}\,. \tag{2c}$$

Zatem

$$I = \left[-t\, e^{-t} - e^{-t}\right]_0^\infty = 1\,. \tag{2d}$$

Rozwiązanie II: Jak poprzednio, zaczynam od obliczenia całki nieoznaczonej, tym razem całkując przez części.

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \int \ln x \left[-\frac{1}{x}\right]' dx = -\frac{\ln x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right))[\ln x]'\, dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx \\ = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{2e}$$

Aby znaleźć wartość całki oznaczonej, należy obliczyć wartość powyższej całki nieoznaczonej w granicach $\infty, 1$. Jedyną trudność sprawia

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\,, \tag{2f}$$

gdzie skorzystaliśmy z reguły de l'Hospitala. Ostatecznie ($\ln 1 = 0$)

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx \;= \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^\infty = -0 - 0 - (-0 - 1) = 1\,. \tag{2g}$$

3. Znajdź moment bezwładności jednorodnego walca eliptycznego m masie m, wysokości h i podstawie opisanej równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{3a}$$

względem osi przechodzącej przez środek walca i zawierającej oś "z".

Rozwiązanie: Moment bezwładności wynosi

$$I = \iiint\limits_W \rho d^2\, dx\, dy\, dz \tag{3b}$$

gdzie d^2 jest kwadratem odległości elementu objętości od wybranej osi, ρ jest gęstością, a całkowanie rozciąga się po całej objętości walca. $\rho = m/V$, trzeba więc najpierw obliczyć objętość V walca:

$$V = \iiint\limits_W dx\, dy\, dz \tag{3c}$$

Wprowadzam współrzędne eliptyczno-walcowe:

$$\begin{cases} x &= ar\cos\phi \\ y &= br\sin\phi \\ z &= z \end{cases} \tag{3d}$$

przy czym $r \in [0,1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in [-h/2, h/2]$. Jakobian przekształcenia (3d) wynosi $J = abr$. Zatem

$$V = ab\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 r\, dr \int\limits_{-h/2}^{h/2} dz = \pi abh \tag{3e}$$

$$\rho = \frac{m}{\pi abh} \tag{3f}$$

We współrzędnych (3d) odległość od osi z wynosi $d^2 = x^2 + y^2 = a^2r^2\cos^2\phi + b^2r^2\sin^2\phi$. Wobec tego moment bezwładności wynosi

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{\pi abh}\cdot ab \int\limits_{-h/2}^{h/2} dz \int\limits_0^1 r\cdot r^2\, dr \int\limits_0^{2\pi} (a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)\, d\phi \\ &= \frac{m}{\pi}\cdot h \cdot \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 \cdot \int\limits_0^{2\pi} (a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)\, d\phi \\ &= \frac{1}{4}m\left[a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\phi\, d\phi + b^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\phi\, d\phi\right] = \frac{1}{2}m\frac{a^2+b^2}{2}\,, \end{aligned} \tag{3g}$$

gdyż $\int\cos^2\phi\, d\phi = \frac{1}{2}(x + \sin\phi\cos\phi)$, $\int\sin^2\phi\, d\phi = \frac{1}{2}(x - \sin\phi\cos\phi)$.

4. Znajdź i sklasyfikuj punkty, w których mogą znajdować się ekstrema funkcji

$$f(x,y) = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,. \tag{4a}$$

Rozwiązanie: Obliczam pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1+xy+y^2-x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \tag{4b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1+xy+x^2+y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \tag{4c}$$

Ekstrema mogą leżeć tylko w punktach, w których pochodne cząstkowe jednocześnie znikają. Otrzymuję zatem układ równań

$$1+xy+y^2-x = 0 \tag{4d}$$

$$1+xy+x^2+y = 0 \tag{4e}$$

Odejmując równanie (4d) od równania (4e), dostaję

$$x^2+y-y^2+x = (x+y)(x-y+1) = 0 \tag{4f}$$

wobec czego ekstrema mogą teżeć tylko na prostych $y=-x$ lub $y=x+1$.

Biorąc pierwszą z tych prostych i podstawiając do równania (4d) otrzymuję $x=1$, czyli $y=-1$.

Biorąc drugą z tych prostych i podstawiając do równania (4d) otrzymuję równanie

$$x^2+x+1=0 \tag{4g}$$

nie mające rozwiązań rzeczywistych. Wobec tego jedyne ekstremum funkcji (4a) leży w punkcie $(1,-1)$.

Drugie pochodne cząstkowe wynoszą

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2x^2(y-1)-3x(y^2+1)+y^3-y^2+y-1}{(1+x^2+y^2)^{5/2}} \tag{4h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{x^3+2x^y+x(-2y^2+3y+1)-y(y^2+1)}{(1+x^2+y^2)^{5/2}} \tag{4i}$$

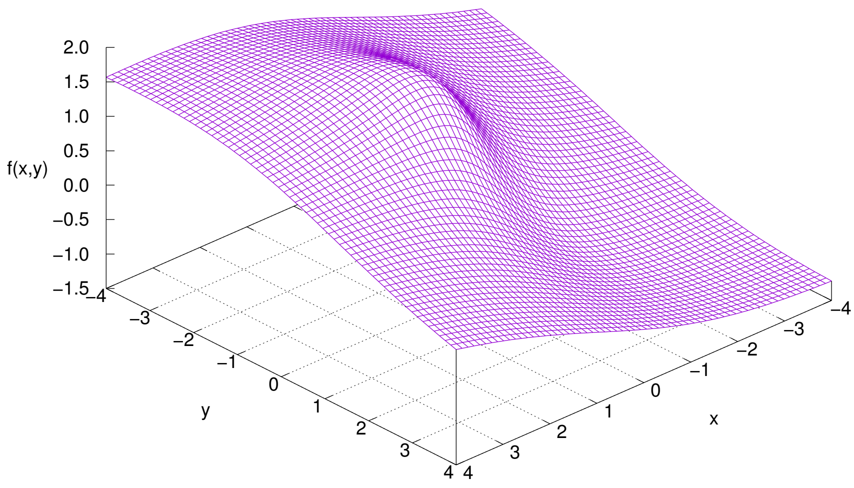
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-x^3+x^2(3y-1)+x(2y^2-1)+2y^2+3y-1}{(1+x^2+y^2)^{5/2}} \tag{4j}$$

Hessian w punkcie $(1,-1)$ ma postać

$$\mathbf{H}_{(1,-1)} = -\frac{1}{3^{3/2}}\left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right], \tag{4k}$$

jego obie wartości własne są ujemne, a więc punkt ten odpowiada maksimum.

Ostatecznie stwierdzamy, że funkcja (4a) ma w punkcie $(1,-1)$ maksimum, którego wartość wynosi $f_{\max} = \sqrt{3}$. Jest to jedyne ekstremum badanej funkcji.



PFG