# Fizyka dla Firm
# Matematyka I

9 lutego 2023

1. Znajdź wartości własne i unormowane, wzajemnie ortogonalne wektory własne macierzy
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{1a}$$

Rozwiązanie: Zaczynamy od znalezienia równania charakterystycznego macierzy (1a):
$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1b}$$

Będę obliczał ten wyznacznik korzystając z rozwinięcia Laplace'a według czwartej kolumny:

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= 1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(\dots) + 0\cdot(\dots) \\
&\quad + (2-\lambda)\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(2-\lambda)^2 + (2-\lambda)\left[(4-\lambda)(2-\lambda)^2 - (2-\lambda) - (2-\lambda)\right] \\
&= (2-\lambda)^2(8-4\lambda-2\lambda+\lambda^2-2-1) \\
&= (2-\lambda)^2(\lambda^2-6\lambda+5) = (\lambda-2)^2(\lambda-1)(\lambda-5) && \text{(1c)} \\
&= \lambda^4 - 10\lambda^3 + 33\lambda^2 - 44\lambda + 20 && \text{(1d)}
\end{aligned}$$

Z postaci (1c), która "naturalnie" pojawia się przy tym sposobie obliczania wyznacznika, natychmiast widać, że wartościami własnymi macierzy (1a) są $\lambda = 1$, $\lambda = 5$, $\lambda = 2$, przy czym ta ostatnia jest dwukrotnie zdegenerowana.

3 pkt

Jeśli ktoś nie wyłączył wspólnego czynnika $(2-\lambda)^2$ przed nawias, tylko wszystko wymnożył i otrzymał postać (1d), musi "ręcznie" znaleźć wartości własne, co można zrobić badając podzielniki wyrazu wolnego.

Szukam wektora własnego do wartości własnej $\lambda = 1$. Niech wektor ten ma postać $[a, b, c, d]$. Podstawiając do równania definiującego wektor własny, $\mathbf{Ax} =$

$\lambda\mathbf{x}$, otrzymuję

$$\begin{cases} 3a+b+c+d=0 \\ a+b=0 \\ a+c=0 \\ a+d=0 \end{cases} \tag{1e}$$

Tylko trzy z tych równań są niezależne. Natychmiast widać, że $b=c=d=-a$, zatem po unormowaniu pierwszy wektor własny ma postać

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{1f}$$

1 pkt

Wektor własny do wartości własnej $\lambda=5$:

$$\begin{cases} -a+b+c+d=0 \\ a-3b=0 \\ a-3c=0 \\ a-3d=0 \end{cases} \tag{1g}$$

$b=c=d=\frac{1}{3}a$, więc po unormowaniu

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{1h}$$

1 pkt

Wektory własne do zdegenerowanej wartości własnej $\lambda=2$ spełniają

$$\begin{cases} 2a+b+c+d=0 \\ a=0 \\ a=0 \\ a=0 \end{cases} \tag{1i}$$

więc $a=0$ i trzeba wybrać *dwa* wzajemnie ortogonalne, unormowane wektory spełniające

$$b+c+d=0 \tag{1j}$$

... na przykład

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{1k}$$

ale jest nieskończenie wiele poprawnych par wektorów spełniających podane wymagania.

2 pkt

2. Niech

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2i & i \\ -2i & 3 & 2i \\ -i & -2i & 3 \end{bmatrix} \tag{2a}$$

Czy macierz $\sqrt{\mathbf{B}}$ (to znaczy taka, że $\sqrt{\mathbf{B}} \cdot \sqrt{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$) jest dobrze zdefiniowana? Jeśli nie, dlaczego? Jeśli tak, znajdź ją.

Rozwiązanie: Macierz $\mathbf{B}$ jest macierzą hermitowską, posiada zatem rozkład spektralny, w myśl którego można definiować pierwiastek. Będzie on poprawnie zdefiniowany jeśli wszystkie wartości własne macierzy są nieujemne.

Aby znaleźć wartości własne macierzy (2a), konstruuję jej wielomian charakterystyczny:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2i & i \\ -2i & 3-\lambda & 2i \\ -i & -2i & 3-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18) \\ &= -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6) \end{aligned} \tag{2b}$$

Wartościami własnymi są $\lambda = 0, 3, 6$. Wszystkie one są nieujemne, a więc macierz $\sqrt{\mathbf{B}}$ jest poprawnie zdefiniowana.

2 pkt

Oznaczmy wektor własny przez $[a, b, c]$. Biorąc kolejne wartości własne otrzymujemy:

$\lambda = 3$:

$$2ib + ic = 0 \tag{2c}$$
$$-2ia + 2ic = 0 \tag{2d}$$
$$-ia - 2ib = 0 \tag{2e}$$

skąd $a = c, b = -\frac{1}{2}c$, a po unormowaniu

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2f}$$

1 pkt

$\lambda = 6$:

$$-3a + 2ib + ic = 0 \tag{2g}$$
$$-2ia - 3b + 2ib = 0 \tag{2h}$$
$$-ia - 2ib - 3c = 0 \tag{2i}$$

skąd $a = \frac{1}{5}(-4+3i)c, b = \frac{1}{5}(2+6i)c$, a po unormowaniu

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{90}}\begin{bmatrix} -4+3i \\ 2+6i \\ 5 \end{bmatrix} \tag{2j}$$

1 pkt

Jak zaraz zobaczymy, wektora własnego do wartości własnej $\lambda = 0$ nie musimy jawnie wyliczać; oznaczmy ten wektor $\mathbf{e}_1$.

Zgodnie z twierdzeniem spektralnym,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B} &= 0 \cdot \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\dagger + 3 \cdot \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^\dagger + 6 \cdot \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^\dagger \\
&= 3 \cdot \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^\dagger + 6 \cdot \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^\dagger \qquad \text{(2k)} \\
\sqrt{\mathbf{B}} &= \sqrt{3} \cdot \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^\dagger + \sqrt{6} \cdot \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^\dagger \qquad \text{(2l)}
\end{aligned}
$$

1 pkt

Trzeba jeszcze znaleźć jawne postaci operatorów rzutowych występujących w (2l).

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^\dagger &= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(2m)}
\end{aligned}
$$

1 pkt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^\dagger &= \frac{1}{90}\begin{bmatrix} -4+3i \\ 2+6i \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4-3i & 2-6i & 5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 5 & 2+6i & -4+3i \\ 2-6i & 8 & 2+6i \\ -4-3i & 2-6i & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{(2n)}
\end{aligned}
$$

1 pkt

skąd już łatwo uzyskać ostateczną postać $\sqrt{\mathbf{B}}$.

3. Zbadaj przebieg zmienności (dziedzina, granice na krańcach dziedziny, parzystość i okresowość, jeśli dotyczy, asymptoty, jeśli istnieją, pochodna, przedziały monotoniczności, ekstrema — charakter i wartości) funkcji

$$g(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \tag{3a}$$

Rozwiązanie: Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych bez zera mianownika, $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Funkcja nie jest okresowa ani nie ma określonej parzystości.

1 pkt

Granice na przedziałach określoności:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \pm\infty \tag{3b}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \tag{3c}$$

Prosta $x = 1$ jest asymptotą pionową funkcji.

1 pkt

Ponieważ

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{(x-1)^2} = 1 \tag{3d}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left( \frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = 2 \tag{3e}$$

prosta $y = x + 2$ jest asymptotą ukośną funkcji w $\pm\infty$.

1 pkt

Pochodna:

$$g'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \tag{3f}$$

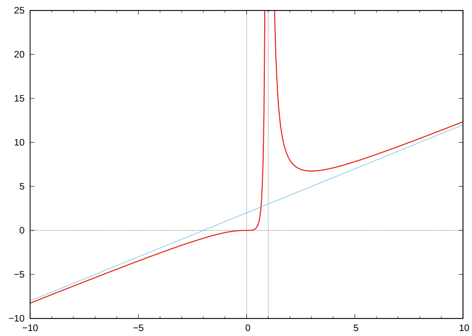
1 pkt

Miejscami zerowymi pochodnej są $x = 0$, $x = 3$, a przedziały monotoniczności — i wynikające z nich zachowanie funkcji w otoczeniu miejsc zerowych pochodnej — określa następująca tabela:

| $x$ | $x^2$ | $(x-1)^3$ | $x-3$ | $g'(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty < x < 0$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | rosnąca |
| $0$ | $0$ | | | $0$ | punkt przegięcia $= 0$ |
| $0 < x < 1$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | rosnąca |
| $1 < x < 3$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | malejąca |
| $3$ | $+$ | $+$ | $0$ | $0$ | minimum $= 27/4 = 6.75$ |
| $x < 3 < +\infty$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | rosnąca |

W otoczeniu $x = 0$ pochodna nie zmienia znaku, a więc nie ma tam ekstremum. W otoczeniu $x = 3$ pochodna zmienia znak z ujemnej na dodatnią, a więc jest tam minimum.

3 pkt



4. Zbadaj przebieg zmienności (patrz wyjaśnienie powyżej) funkcji

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \tag{4a}$$

Rozwiązanie: Ponieważ podstawa potęgi musi być nieujemna, dziedziną funkcji (4a) jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, $\mathbb{R}^+$.

1 pkt

Aby znaleźć granice funkcji (4a) w $0, +\infty$, przedstawmy tę funkcję w postaci

$$x^{\frac{1}{x}} \equiv \exp\left[\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right] = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) \tag{4b}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right) = \exp(\infty\cdot(-\infty)) = \exp(-\infty) = 0 \tag{4c}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\,, \tag{4d}$$

gdzie skorzystaliśmy z reguły de l'Hospitala. Wobec tego

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \exp(0) = 1\,. \tag{4e}$$

Płynie stąd wniosek, że prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą funkcji (4a) w $+\infty$.

2 pkt

Aby znaleźć pochodną funkcji (4a) możemy skorzystać z postaci (4b).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right)' = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)\cdot\left(\frac{\ln x}{x}\right)' \\ &= \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)\cdot\frac{x\cdot\frac{1}{x}-\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}\cdot x^{\frac{1}{x}} \end{aligned} \tag{4f}$$

Ten sam wynik można uzyskać korzystając z "pochodnej logarytmicznej":

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = f(x)\cdot(\ln f(x))' \tag{4g}$$

co w sposób oczywisty natychmiast prowadzi do (4f).

2 pkt

Znak pochodnej $f'(x)$ zależy od znaku wyrażenia $1 - \ln x$ (mianownik i eksponenta są dodatnie). Wobec tego

| | | |
|---|---|---|
| $0 < x < e$ | $f'(x) > 0$ | funkcja rosnąca |
| $x = e$ | $f'(x) = 0$ | ekstremum |
| $x > e$ | $f'(x) < 0$ | funkcja malejąca |

Ponieważ w $x = e$ funkcja zmienia się z rosnącej w malejącą, punkt $x = e$ oznacza maksimum o wartości $f_{\max} = e^{\frac{1}{e}} \simeq 1.4445$.

2 pkt