Rozwiązanie jednego zadania z zestawu 62

P. F. Góra

24 maja 2023

Znajdź ekstrema funkcji

$$g(x, y) = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$$

Rozwiązanie jest dość proste, ale trzeba wykazać się pewną pomysłowością i dlatego je zamieszczam. Sposób polega na odejmowaniu stronami równań, które są w jakimś sensie podobne.

Pochodne cząstkowe są równe

$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^{-(x^2+xy+y^2)} \left(-10x^2 + 50x - 19xy - 7y^2 + 25y + 5\right) \quad \text{(1a)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = e^{-(x^2+xy+y^2)} \left(-5x^2 + 25x - 17xy - 14y^2 + 50y + 7\right) \quad \text{(1b)}$$

Przyrównujemy pochodne cząstkowe do zera; ponieważ czynniki $e^{-(x^2+xy+y^2)} \neq 0$, możemy przez nie wydzielić, otrzymując układ równań:

$$-10x^2 + 50x - 19xy - 7y^2 + 25y + 5 = 0 \quad \text{(2a)}$$

$$-5x^2 + 25x - 17xy - 14y^2 + 50y + 7 = 0 \quad \text{(2b)}$$

Mnożę drugie z równań (2) przez 2 i odejmuję od pierwszego, otrzymując

$$15xy + 21y^2 - 75y - 9 = 0\,. \quad \text{(3)}$$

Teraz mnożę pierwsze z równań (2) przez dwa i odejmuję od niego drugie:

$$-15x^2 + 75x - 21xy + 3 = 0\,. \quad \text{(4)}$$

Dzielę równania (3),(4) stronami przez 3 i tworzę z nich układ równań, formalnie *równoważny* układowi (2):

$$5xy + 7y^2 - 25y - 3 = 0 \quad \text{(5a)}$$

$$-5x^2 - 7xy + 25x + 1 = 0 \quad \text{(5b)}$$

Zauważmy, że $x = 0$, $y = 0$ *nie* spełniają układu (5). Gdyby $x = 0$, drugie z równań (5) jest sprzeczne. Gdyby $y = 0$, sprzeczne jest pierwsze z równań (5). Wobec tego mnożę pierwsze z równań (5) przez x, drugie przez y:

$$5x^2y + 7xy^2 - 25xy - 3x = 0 \quad \text{(6a)}$$

$$-5x^2y - 7xy^2 + 25xy + y = 0 \quad \text{(6b)}$$

Dodając te równania stronami, dostaję

$$y = 3x\,. \quad \text{(7)}$$

Podstawiając to do drugiego z równań (5), otrzymuję równanie kwadratowe

$$-26x^2 + 25x + 1 = 0\,, \quad \text{(8)}$$

którego rozwiązaniami są $x = 1$, $x = -1/26$. Wobec tego ekstrema funkcji $g(x, y)$ mogą leżeć w punktach $(1, 3)$, $\left(-\frac{1}{26}, -\frac{3}{26}\right)$.

$$g(1, 3) = e^{-13} > 0\,, \quad g\left(-\frac{1}{26}, -\frac{3}{26}\right) = -26e^{-\frac{1}{52}} < 0\,. \tag{9}$$

Ponieważ $\lim_{|x|\to\infty} g(x, y) = 0$, $\lim_{|y|\to\infty} g(x, y) = 0$ a funkcja jest ciągła, możemy wywnioskować, że punkt $(1, 3)$ odpowiada maksimum, zaś punkt $\left(-\frac{1}{26}, -\frac{3}{26}\right)$ minimum.