Fizyka dla firm
Zadania 54

P. F. Góra

27 maja 2021

1. Oblicz całkę krzywoliniową
$$\int\limits_{\Gamma} xy\,dx + x^2\,dy \tag{1}$$

   (a) po odcinku o początku $(a, 0)$ i końcu $(0, b)$

   Rozwiązanie (bo na ćwiczeniach źle sparametryzowaliśmy drogę całkowania ☹):
   Musimy sparametryzować podany odcinek, będący drogą całkowania. Niech parametr $t \in [0, 1]$. Zmienna x zmienia się jak $x = A't + B'$, przy czym $x(0) = a$, $x(1) = 0$, skąd $A' = -a$, $B' = a$. Zmienna y zmienia się jak $y = At+B$, przy czym $y(0) = 0$, $y(1) = b$, skąd $A = b$, $B = 0$. Ostatecznie parametryzacją odcinka jest
$$\begin{cases} x &= -at + a\,,\ t \in [0, 1] \\ y &= bt \end{cases} \tag{2a}$$

   Mamy
$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma} xy\,dx + x^2\,dy &= \int\limits_0^1 \big((-at + a)bt \cdot (-a) + (-at + a)^2 \cdot b\big)\,dt \\ &= a^2 b \int\limits_0^1 (2t^2 - 3t + 1)\,dt = a^2 b \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t\right)_0^1 \\ &= a^2 b \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1\right) = \frac{1}{6}a^2 b \end{aligned} \tag{2b}$$

   (b) Po łuku elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ o początku $(a, 0)$ i końcu $(0, b)$

2. Oblicz całkę krzywoliniową
$$\oint\limits_{\Gamma} y^2\,dx + x^2\,dy \tag{3}$$
   po okręgu $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

3. Oblicz całkę podwójną
$$\iint\limits_{D} (2x - 2y)\,dx\,dy \tag{4}$$
   gdzie D jest wnętrzem okręgu $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

4. Udowodnij, że całka
$$\int_A^B yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz \tag{5}$$
nie zależy od drogi łączącej punkty A, B.

5. Znajdź długość cykloidy $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Rozwiązanie:
$$\begin{aligned} d &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2\sin^t}\,dt \\ &= r\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt \end{aligned} \tag{6a}$$

Dalej zadanie możemy rozwiązywać na dwa sposoby, w zależności od tego, jak obliczymy całkę w (6a).

I. Przez "podstawienie standardowe" $u = \mathrm{tg}\,(t/2)$. Trzeba tu uważać, gdyż argument funkcji tangens przechodzi przez osobliwość dla $t = \pi$. Jednak ponieważ $\cos t = \cos(2\pi - t)$, funkcja podcałkowa jest symetryczna względem $t = \pi$. Zatem
$$\begin{aligned} d &= r\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt = 2\sqrt{2}r\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \mathrm{tg}\,\frac{t}{2} \\ dt = \frac{2}{1+u^2}\,du \\ \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ 0 \to 0 \\ \pi \to \infty \end{array} \right| = 8r\int_0^{\infty} \frac{u\,du}{(1+u^2)^{3/2}} \\ &= \left| \begin{array}{l} 1+u^2 = z \\ 2u\,du = dz \\ 0 \to 1 \\ \infty \to \infty \end{array} \right| = 4r\int_1^{\infty} z^{-\frac{3}{2}}\,dz = 4r\left(-\frac{2}{\sqrt{z}}\right)_1^{\infty} = 8r \end{aligned} \tag{6b}$$

II. $\cos t = \cos(2 \cdot (t/2)) = 1 - 2\sin^2(t/2)$. Zatem
$$\begin{aligned} d &= r\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt = r\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 1 + 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \\ &= 2r\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = \left| \begin{array}{l} t/2 = z \\ dt = 2dz \\ 0 \to 0 \\ 2\pi \to \pi \end{array} \right| \\ &= 4r\int_0^{\pi} \sin z\,dz = 4r\left(-\cos z\right)_0^{\pi} = 8r \end{aligned} \tag{6c}$$

6. Znajdź długość łuku paraboli $y = ax^2$, $x \in [0, 2]$.