Fizyka dla firm
Zadania 53

P. F. Góra

20 maja 2021

1. Niech
$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1a}$$
x_0, σ^2 są parametrami. Oznaczmy ($k \in \mathbb{N}$)
$$\left\langle x^k \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \rho(x)\,dx \tag{1b}$$
$\left\langle x^k \right\rangle$ nazywam *k-tym momentem centralnym* rozkładu normalnego. Oblicz

   (a) $\langle x \rangle$

   (b) $\left\langle (x-x_0)^2 \right\rangle$

   Rozwiązanie:
$$\begin{aligned}\left\langle (x-x_0)^2 \right\rangle & \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2\,\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2\,\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy\end{aligned} \tag{1c}$$
   Mamy
$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-kx^2)\,dx &= \sqrt{\frac{\pi}{k}} \\ \frac{d}{dk}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-kx^2)\,dx &= \frac{d}{dk}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-x^2)\,\exp(-kx^2)\,dx &= \frac{d}{dk}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \\ -\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,\exp(-kx^2)\,dx &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k^3}}\end{aligned} \tag{1d}$$
   Podstawiając $k = 1/(2\sigma^2)$ otrzymujemy
$$\left\langle (x-x_0)^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{8\sigma^6}}} = \sigma^2 \tag{1e}$$

(c) $\left\langle x^3 \right\rangle$

(d) $\left\langle (x-x_0)^4 \right\rangle$

2. Oblicz całkę

$$\iint\limits_D (x+y)^4 \, dx \, dy \tag{2}$$

gdzie D jest kwadratem o wierzchołkach $(-1,0),(0,1),(1,0),(0,-1)$.

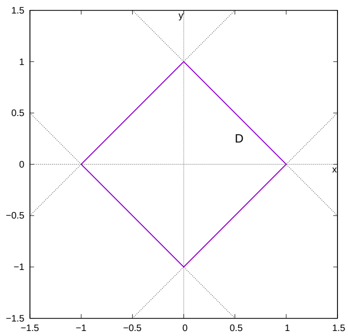
Rozwiązanie: Dokonuję zmiany zmiennych

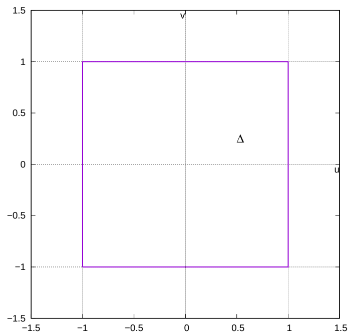
$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}(u+v) \\ y &= \frac{1}{2}(u-v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y &= u \\ x-y &= v \end{cases} \tag{3a}$$

Jakobian przekształcenia (3a) wynosi

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \tag{3b}$$

a obszar D jest obrazem obszaru Δ, będącego kwadratem o wierzchołkach $(-1,-1),(1,-1),(1,1),(-1,1)$.





Wobec tego

$$\begin{aligned} \iint\limits_D (x+y)^4 \, dx \, dy &= \iint\limits_\Delta u^4 \left| -\frac{1}{2} \right| du \, dv \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} dv \int\limits_{-1}^{1} u^4 \, du = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left[\frac{1}{5} u^5 \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} \end{aligned} \tag{3c}$$

3. Oblicz całkę

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{4}$$

4. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami

$$z = x+y \, , \; xy = 1 \, , \; xy = 2 \, , \; y = x \, , \; y = 2x \, , \; z = 0 \, , \; (x > 0 \, , \; y > 0) \tag{5}$$

Proszę spróbować zwizualizować sobie tę bryłę, a w szczególności jej podstawę (obszar całkowania).

5. Za pomocą całki podwójnej znajdź pole elipsy o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

Wskazówka: Proszę posłużyć się eliptycznym układem współrzędnych.

6. Znajdź objętość elipsoidy
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{7}$$

Rozwiązanie: Objętość dana jest wzorem
$$V = \iiint\limits_E dx\,dy\,dz \tag{8a}$$
gdzie E jest rozważaną elipsoidą.

Wprowadzamy współrzędne "elipsoidalne":
$$\begin{cases} x &= a \cdot r\cos\theta\cos\phi \\ y &= b \cdot r\cos\theta\sin\phi \\ z &= c \cdot r\sin\theta \end{cases} \tag{8b}$$
$r \in [0,1], \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \phi \in [0, 2\pi]$. Jakobian tego przekształcenia wynosi $|J| = abc\,r^2\cos\theta$. Otrzymujemy
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\phi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 abc\,r^2\cos\theta\,dr \\ &= 2\pi abc \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta\ \frac{1}{3}r^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\pi abc\,\sin\theta|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}\pi abc\,(1-(-1)) \\ &= \frac{4}{3}\pi abc \end{aligned} \tag{8c}$$

7. Znajdź potencjał grawitacyjny pochodzący od jednorodnej kuli o masie M i promieniu R *wewnątrz* tej kuli, to znaczy w odległości $0 \leqslant L \leqslant R$ od środka kuli.
   Wskazówka: całkując po zmiennej radialnej, rozważ przypadki $r < L$, $r > L$.

8. Dany jest sferycznie symetryczny obłok materii, którego gęstość spada wykładniczo wraz z odległością od centrum obłoku:
$$\rho(r) = \rho_0 \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \tag{9}$$
   $\rho_0 > 0\,, r_0 > 0$ są parametrami. Znajdź potencjał grawitacyjny w odległości L od centrum obłoku.

PFG