

# Fizyka dla firm

## Zadania 51

P. F. Góra

5 maja 2021

1. Oblicz jacobiany następujących przekształceń i sprawdź, czy przekształcenia te są homeomorfizmami:

$$\begin{cases} x = ar \cos \varphi, & a = \text{const} \neq 0 \\ y = br \sin \varphi, & b = \text{const} \neq 0 \end{cases} \quad (1a)$$

(współrzędne eliptyczne)

$$\begin{cases} x = u^3 - v \\ y = v^3 + u \end{cases} \quad (1b)$$

$$\begin{cases} x = \frac{u-v}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{u+v}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (1c)$$

$$\begin{cases} x = \ln u, & u, v > 0 \\ y = \ln v \end{cases} \quad (1d)$$

(współrzędne logarytmiczne)

$$\begin{cases} x = \arctg \frac{\pi u}{2}, & -1 < u, v < 1 \\ y = \arctg \frac{\pi v}{2} \end{cases} \quad (1e)$$

2. Znajdź obraz kwadratu  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  w przekształceniu (1c).  
3. Znajdź obraz pierwszej ćwiartki układu współrzędnych, czyli obszaru  $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ , w przekształceniu (1d).  
4. Znajdź obraz kwadratu otwartego  $(-1, 1) \times (-1, 1)$  w przekształceniu (1e).  
5. Dane jest przekształcenie

$$\mathbf{x} = \mathbf{O}\mathbf{u} \quad (2a)$$

gdzie  $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ , a  $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  jest macierzą ortogonalną. Oblicz jacobian tego przekształcenia. Wskazówka:

$$x_i = \sum_{k=1}^N O_{ik} u_k \quad (2b)$$

a wobec tego  $\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = ?$  Ile wynoszą składowe macierzy jednostkowej,  $\mathbb{I}_{ij} = ?$

6. Znajdź jacobian przekształcenia

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = \sin(x^2 - y^2) \end{cases} \quad (3)$$

- 7\*. Spróbujmy uogólnić powyższe zadanie. Niech  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją dwu zmiennych klasy  $C_1$ , a  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcją jednej zmiennej klasy  $C_1$ . Dane jest przekształcenie

$$\begin{cases} u = f(x, y) \\ v = g(f(x, y)) \end{cases} \quad (4)$$

Znajdź jacobian tego przekształcenia.

8. Znajdź jacobian przekształcenia

$$\begin{cases} u = y^2 + z^2 + xz \\ v = x^2 + z^2 + yz \\ w = x^2 + y^2 + xy \end{cases} \quad (5)$$

9. Zbadaj ekstrema następujących funkcji uwikłanych:

$$y^3 + 2xy + x^2 = 0 \quad (6a)$$

$$x^3 + y^3 - 12xy = 0 \quad (6b)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \quad (6c)$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (6d)$$

PFG