Fizyka dla firm
Zadania 50
zestaw do samodzielnego rozwiązania

P. F. Góra

5 maja 2021

1. Sprawdź, czy poniższe formy różniczkowe są różniczkami zupełnymi. Jeśli nie, znajdź ich czynniki całkujące. Scałkuj otrzymane różniczki zupełne, to znaczy znajdź funkcje f takie, że $df = (\mu \cdot u)\,dx + (\mu \cdot v)\,dy$ (jeśli wyjściowa forma różniczkowa jest różniczką zupełną, $\mu \equiv 1$) — patrz wyjaśnienie poniżej.

$$DA = y\,dx - \frac{2x+y}{y^2}\,dy \tag{1a}$$
$$DB = y(1+x)\,e^{x+y}\,dx + x(1+y)\,e^{x+y}\,dy \tag{1b}$$
$$DC = \sin y\,dx + \operatorname{tg} x \cdot \cos y\,dy \tag{1c}$$

2. Dana jest forma Pfaffa
$$DQ = dx + \frac{x}{y}\,dy \tag{2a}$$
   (a) znajdź czynnik całkujący formy (2a) zależny tylko od zmiennej x, $\mu_1(x)$
   (b) scałkuj różniczkę zupełną
$$df_1 = \mu_1(x)\,dx + \frac{x}{y}\,\mu_1(x)\,dy \tag{2b}$$
   gdzie $\mu_1(x)$ jest czynnikiem całkującym znalezionym w poprzednim kroku.
   (c) znajdź czynnik całkujący formy (2a) zależny tylko od zmiennej y, $\mu_2(y)$
   (d) scałkuj różniczkę zupełną
$$df_2 = \mu_2(y)\,dx + \frac{x}{y}\,\mu_2(y)\,dy \tag{2c}$$
   gdzie $\mu_2(y)$ jest czynnikiem całkującym znalezionym w poprzednim kroku.
   (e) Oblicz jakobian
$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x,y)} \tag{2d}$$

3. Dana jest forma Pfaffa
$$DR = x\,e^{x^2}\,dx + y\,e^{x^2}\,dy \tag{3a}$$
   (a) znajdź czynnik całkujący formy (3a) zależny tylko od zmiennej x, $\nu_1(x)$
   (b) scałkuj różniczkę zupełną
$$dg_1 = \nu_1(x)x\,e^{x^2}\,dx + \nu_1(x)y\,e^{x^2}\,dy \tag{3b}$$
   gdzie $\nu_1(x)$ jest czynnikiem całkującym znalezionym w poprzednim kroku.
   (c) znajdź czynnik całkujący formy (3a) zależny tylko od zmiennej y, $\nu_2(y)$
   (d) scałkuj różniczkę zupełną
$$dg_2 = \nu_2(y)x\,e^{x^2}\,dx + \nu_2(y)y\,e^{x^2}\,dy \tag{3c}$$
   gdzie $\nu_2(x)$ jest czynnikiem całkującym znalezionym w poprzednim kroku.

(e) Oblicz jakobian

$$\frac{D(g_1, g_2)}{D(x, y)} \tag{3d}$$

Wyjaśnienie: Jeżeli forma różniczkowa

$$df = u(x, y)\, dx + v(x, y)\, dy \tag{4a}$$

jest różniczką zupełną, funkcję $f(x, y)$ znajdujemy całkując

$$f(x, y) = \int u(x, y)\, dx + \varphi(y) \tag{4b}$$

$$f(x, y) = \int v(x, y)\, dy + \psi(x) \tag{4c}$$

gdzie całkując po x trakujemy y jako parametr i *vice versa*. Funkcja $\varphi(y)$ nie zależy od zmiennej x. Funkcja $\psi(x)$ nie zależy od zmiennej y. Mogą to być funkcje stałe. Funkcje φ, ψ dobieramy tak, aby wyrażenia (4b), (4c) były ze sobą zgodne. Nazywamy to "całkowaniem różniczki zupełnej".

PFG