

Fizyka dla firm

Zadania 41

P. F. Góra

3 marca 2021

1. Zbadaj zbieżność szeregów o następujących wyrazach ogólnych:

$$\frac{6^n}{n!} \quad (1a)$$

$$\frac{n^3}{2^n} \quad (1b)$$

$$\frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!} \quad (1c)$$

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \quad (1d)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \quad (1e)$$

$$\frac{\sin 3^n}{3^n} \quad (1f)$$

$$\frac{e^n n!}{n^n} \quad (1g)$$

Rozwiązanie: Aby sprawdzić, czy szereg o wyrazie ogólnym (1g) jest zbieżny, trzeba rozważyć pewną bardzo nieoczywistą granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 \quad (1ha)$$

Stąd mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n n!}{n^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{n}\right)^n n! \cdot \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} = +\infty \end{aligned} \quad (1hb)$$

a więc szereg o wyrazie (1g) jest rozbieżny, gdyż ciąg jego wyrazów nie jest zbieżny do zera, a nawet sam jest rozbieżny.

Granica (1ha) jest podstawą ważnego **wzoru Stirlinga**: Dla odpowiednio dużych n

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (1hc)$$

$$\begin{aligned} \ln n! &\simeq \ln \left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \right) \\ &\simeq \ln n^n - \ln e^n + \ln \sqrt{2\pi n} = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \ln \sqrt{2\pi} \\ &\simeq n \ln n - n \end{aligned} \quad (1hd)$$

$$\frac{\ln n}{2^n} \quad (1i)$$

$$\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (1j)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \quad (1k)$$

$$\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi \quad (1l)$$

2. Znajdź promień zbieżności i zbadaj zbieżność na krańcach przedziałów zbieżności szeregów potęgowych o następujących wyrazach ogólnych:

$$\frac{x^n}{n^2} \quad (9a)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{x^n}{n^2} \quad (9b)$$

$$n x^n \quad (9c)$$

$$\frac{x^n}{n!} \quad (9d)$$

$$\frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad (9e)$$

$$\frac{x^n}{n \cdot 5^n} \quad (9f)$$

$$\frac{n!}{(2n)!} x^n \quad (9g)$$

$$\frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n \quad (9h)$$

PFG