Fizyka dla firm
częściowe rozwiązania zestawu 52

P. F. Góra

12 maja 2021

1. Znajdź równania stycznych do następujących funkcji:

$$x^3 + y^3 + 2x - 6 = 0\,,\ y = 3 \text{ lub } y = -3 \tag{1a}$$

Oznaczmy lewą stronę równania (1a) przez $F(x, y)$. Mamy

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 \tag{1b}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2 \tag{1c}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 2}{3y^2} \tag{1d}$$

Przede wszystkim widzimy, że wyrażenia (1a) nie daje się rozwikłać ze względu na y w okolicach punktu $y = 0$. Widać, że pochodna $\frac{dy}{dx}$ w tym punkcie jest rozbieżna do $-\infty$. Wykres funkcji $y(x)$ przecina tam oś OX pod kątem prostym.

Dla $y = -3$ otrzymujemy $x = 3$. Jest to jedyny rzeczywisty pierwiastek równania

$$x^3 + 2x - 33 = 0 \tag{1e}$$

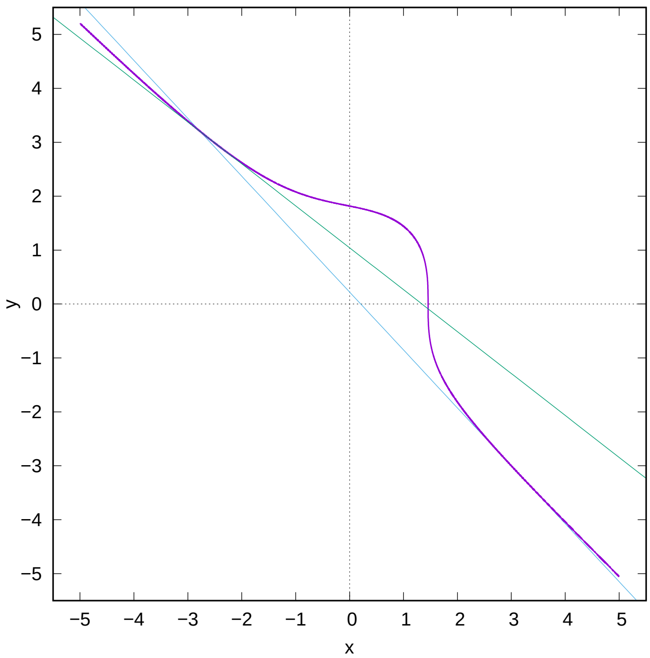
Styczną przechodzącą przez punkt $(3, -3)$ możemy wystaczyć analitycznie:

$$y = -\frac{29}{27}x + \frac{2}{9} \tag{1f}$$

Dla $y = 3$ otrzymujemy

$$x^3 + 2x + 21 = 0 \tag{1g}$$

To równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty, ale jest on niewymierny i styczną w tym punkcie możemy wyznaczyć numerycznie (lub skorzystać z bardzo niewygodnych wzorów).



Rysunek przedstawia odwikłaną funkcję $y(x)$ (gruba granatowa linia) i poszukiwane styczne (cienkie linie niebieska i zielona)

2. Znajdź równanie stycznej do spirali logarytmicznej

$$r = e^{k\varphi} \tag{2a}$$

Przechodząc do współrzędnych kartezjańskich otrzymujemy

$$\begin{cases} x &= e^{k\varphi}\cos\varphi \\ y &= e^{k\varphi}\sin\varphi \end{cases} \tag{2b}$$

Wobec tego

$$dx = e^{k\varphi}(k\cos\varphi - \sin\varphi)\,d\varphi \tag{2c}$$

$$dy = e^{k\varphi}(k\sin\varphi + \cos\varphi)\,d\varphi \tag{2d}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k\sin\varphi + \cos\varphi}{k\cos\varphi - \sin\varphi} \tag{2e}$$

Pochodna nie istnieje w punktach spełniających $\operatorname{tg}\varphi = k$. W punktach tych styczna do spirali jest prostopadła do osi OX. Pamiętajmy, że kreśląc spirale, dla $k > 0$ rozważamy $\varphi \in [0, \infty)$.

Jako równanie stycznej otrzymujemy

$$y = \frac{k\sin\varphi + \cos\varphi}{k\cos\varphi - \sin\varphi}\,x - \frac{e^{k\varphi}}{k\cos\varphi - \sin\varphi} \tag{2f}$$

Uwaga: W równaniu (2f) zmienne x, y odnoszą się do *stycznej*, natomiast φ służy do wyznaczenia punktu, przez który przeprowadzamy styczną.