Fizyka dla firm — Matematyka

Egzamin — rozwiązania

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

1 lutego 2021

1. Ciąg Fibonacciego jest zdefiniowany następująco: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dla $n = 3, 4, 5, \ldots$. Udowodnij, że $3 \,|a_{4n}$, to znaczy, że wyrazy ciągu Fibonacciego postaci a_{4n}, $n \in \mathbb{N}$, są podzielne przez 3.

   (0-3pkt)

   Sprawdzam, czy teza zachodzi dla $n = 1$.

$$a_4 = a_3 + a_2 = \underbrace{a_2 + a_1}_{a_3} + a_1 = a_2 + 2 \cdot a_1 = 1 + 2 = 3 \quad \text{(1a)}$$

   czyli teza dla $n = 1$ zachodzi.

1 pkt

Zakładam, że dla pewnego k zachodzi $a_{4k} = 3s$, gdzie $s \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
a_{4(k+1)} &= a_{4k+4} = a_{4k+3} + a_{4k+2} = \underbrace{a_{4k+2} + a_{4k+1}}_{a_{4k+3}} + a_{4k+2} \\
&= 2 \cdot a_{4k+2} + a_{4k+1} = 2\underbrace{(a_{4k+1} + a_{4k})}_{a_{4k+2}} + a_{4k+1} \\
&= 3 \cdot a_{4k+1} + 2 \cdot a_{4k} = 3 \cdot a_{4k+1} + 2 \cdot 3s \\
&= 3(a_{4k+1} + s) \qquad \text{(1b)}
\end{aligned}
$$

co jest podzielne przez 3, gdyż $s, a_{4k+1} \in \mathbb{N}$. Zatem, na mocy twierdzenia o indukcji matematycznej, teza zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

2 pkt lub 1 pkt w przypadku *drobnych* pomyłek

2. Rozwiąż równanie

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{5} \tag{2a}$$

(0-3pkt)

Korzystam ze wzorów na sinus sumy i różnicy kątów:

$$\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{x}{2}-\left(\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{x}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{5} \tag{2b}$$

$$2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{x}{2} = -\cos\frac{\pi}{5} \tag{2c}$$

1 pkt

Ponieważ $\cos\frac{\pi}{5} \neq 0$,

$$2\sin\frac{x}{2} = -1 \tag{2d}$$
$$-\sin\frac{x}{2} = = \frac{1}{2} \tag{2e}$$
$$\sin\left(\pi + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \tag{2f}$$

To daje *dwie* serie rozwiązań:

Pierwsza:

$$\pi + \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k'\pi \tag{2g}$$
$$\frac{x}{2} = -\frac{5\pi}{6} + 2k'\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \tag{2h}$$
$$x = \frac{7\pi}{3} + 4k\pi \tag{2i}$$

Druga:

$$\pi + \frac{x}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k'\pi \tag{2j}$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \tag{2k}$$

$$x = \frac{11\pi}{3} + 4k\pi \tag{2l}$$

Po 1 pkt za *każdą* serię
lub 1 pkt za *obie* serie, ale z *drobnymi* pomyłkami

3. Rozwiąż równanie

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0 \tag{3a}$$

(0-3pkt)

Wielomian ma współczynniki całkowite. Widzimy, że $x = -1$ jest pierwiastkiem wielomianu: $-1 + 3 - 4 + 2 = 0$.

1 pkt

Możemy podzielić wielomian przez dwumian $x - (-1) = x + 1$:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 &= (x+1)(b_2x^2 + b_1x + b_0) \\ &= b_2x^3 + (b_2 + b_1)x^2 + (b_1 + b_0)x + b_0 \end{aligned} \tag{3b}$$

Porównując współczynniki przy poszczególnych potęgach, widzimy, że $b_2 = 1$, $b_1 = 2$, $b_0 = 2$, zatem

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x+1)(x^2 + 2x + 2) \tag{3c}$$

1 pkt

Równanie

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \tag{3d}$$

rozwiązujemy standardowym sposobem: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$, $x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$.

1 pkt

Ostatecznie rozwiązaniami równania (3a) są liczby $x = -1$, $x = -1 - i$, $x = -1 + i$.

4. Znajdź wartości własne i unormowane, wzajemnie ortogonalne wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{4a}$$

(0-7pkt)

Zaczynamy od znalezienia równania charakterystycznego macierzy (4a):

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4b}$$

Będę obliczał ten wyznacznik korzystając z rozwinięcia Laplace'a według czwartej kolumny:

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= 1\cdot(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(\dots) + 0\cdot(\dots) \\
&+ (2-\lambda)\cdot(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(2-\lambda)^2 + (2-\lambda)\left[(4-\lambda)(2-\lambda)^2 - (2-\lambda) - (2-\lambda)\right] \\
&= (2-\lambda)^2(8-4\lambda-2\lambda+\lambda^2-2-1) \\
&= (2-\lambda^2)(\lambda^2-6\lambda+5) = (\lambda-2)^2(\lambda-1)(\lambda-5) \qquad \text{(4c)} \\
&= \lambda^4 - 10\lambda^3 + 33\lambda^2 - 44\lambda + 20 \qquad \text{(4d)}
\end{aligned}
$$

Z postaci (4c), która “naturalnie” pojawia się przy tym sposobie obliczania wyznacznika, natychmiast widać, że wartościami własnymi macierzy (4a) są $\lambda = 1$, $\lambda = 5$, $\lambda = 2$, przy czym ta ostatnia jest dwukrotnie zdegenerowana.

3 pkt

Jeśli ktoś nie wyłączył wspólnego czynnika $(2 - \lambda)^2$ przed nawias, tylko wszystko wymnożył i otrzymał postać (4d), musi “ręcznie” znaleźć wartości własne, co zostanie omówione w następnym zadaniu.

Szukam wektora własnego do wartości własnej $\lambda = 1$. Niech wektor ten ma postać $[a, b, c, d]$. Podstawiając do równania definiującego wektor własny, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, otrzymuję

$$\begin{cases} 3a + b + c + d = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \tag{4e}$$

Tylko trzy z tych równań są niezależne. Natychmiast widać, że $b = c = d = -a$, zatem po unormowaniu pierwszy wektor własny ma postać

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{4f}$$

1 pkt

Wektor własny do wartości własnej $\lambda = 5$:

$$\begin{cases} -a + b + c + d = 0 \\ a - 3b = 0 \\ a - 3c = 0 \\ a - 3d = 0 \end{cases} \tag{4g}$$

$b = c = d = \frac{1}{3}a$, więc po unormowaniu

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{4h}$$

1 pkt

Wektory własne do zdegenerowanej wartości własnej $\lambda = 2$ spełniają

$$\begin{cases} 2a + b + c + d = 0 \\ a = 0 \\ a = 0 \\ a = 0 \end{cases} \tag{4i}$$

więc $a = 0$ i trzeba wybrać *dwa* wzajemnie ortogonalne, unormowane wektory spełniające

$$b + c + d = 0 \tag{4j}$$

1 pkt

. . . na przykład

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{4k}$$

ale jest nieskończenie wiele poprawnych par wketorów spełniających podane wymagania.

1 pkt

5. Zbadaj przebieg zmienności (dziedzina, granice na krańcach dziedziny, ekstrema, przedziały monotoniczności, punkty przegięcia) funkcji

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + 11x^3 - 22x^2 + 20x + 1 \tag{5a}$$

(0-7pkt)

Badana funkcja lest wielomianem, więc jej dziedziną jest cały zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{R}$, a granice na krańcach dziedziny wynoszą

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + 11x^3 - 22x^2 + 20x + 1\right) = -\infty \tag{5b}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + 11x^3 - 22x^2 + 20x + 1\right) = +\infty \tag{5c}$$

1 pkt

Obliczam pochodną:

$$f'(x) = x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 44x + 20 \tag{5d}$$

Jest to ten sam wielomian, co wielomian charakterystyczny (4d) w poprzedni zadaniu. Jeśli ktoś znalazł pierwiastki tego wielomianu, nie musi powtarzać tego kroku. Jeśli ktoś skorzystał z postaci iloczynowej nie wymnażając wszystkich czynników, powinien postąpić jak następuje:

Wielomian (5d) ma współczynniki całkowite, a jedny z pierwiastków jest $x = 1$. Dzielimy wielomian (5d) przez dwuian $x - 1$:

$$\begin{aligned} x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 44x + 20 &= (x-1)(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) \\ &= b_3x^4 + (b_2 - b_3)x^3 + (b_1 - b_2)x^2 + (b_0 - b_1)x - b_0 \end{aligned} \tag{5e}$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach otrzymujemy $b_3 = 1$, $b_2 = -9$, $b_1 = 24$, $b_0 = -20$, czyli

$$x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 44x + 20 = (x-1)(x^3 - 9x^2 + 24x - 20) \tag{5f}$$

Powstały wielomian trzeciego stopnia także ma współczynniki całkowite, a jego pierwiastkiem jest $x = 2$. Zatem

$$\begin{aligned} x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 44x + 20 &= (x-1)(x^3 - 9x^2 + 24x - 20) \\ &= (x-1)(x-2)(c_2x^2 + c_1x + c_0) \\ &= (x-1)(c_2x^3 + (c_1 - 2c_2)x^2 + (c_0 - 2c_1)x - 2c_0) \end{aligned} \tag{5g}$$

$c_2 = 1$, $c_1 = -7$, $c_0 = 10$, czyli

$$\begin{aligned} x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 44x + 20 &= (x-1)(x-2)(x^2 - 7x + 10) \\ &= (x-1)(x-2)^2(x-5) \end{aligned} \tag{5h}$$

Miejscami zerowymi pochodnej są $x = 1$, $x = 2$ (dwukrotne) i $x = 5$.

3 pkt

Obliczam drugą pochodną:

$$f''(x) = 4x^3 - 30x^2 + 66x - 44 = 2(2x^3 - 15x^2 + 33x - 22) \quad \text{(5i)}$$

Łatwo sprawdzić, że $f''(2) = 2(2 \cdot 8 - 15 \cdot 4 + 33 \cdot 2 - 22) = 0$ oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(x-2)(x^2 - 11x + 11) \\ &= 4(x-2)\left(x - \frac{11}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{11}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}\right) \end{aligned} \quad \text{(5j)}$$

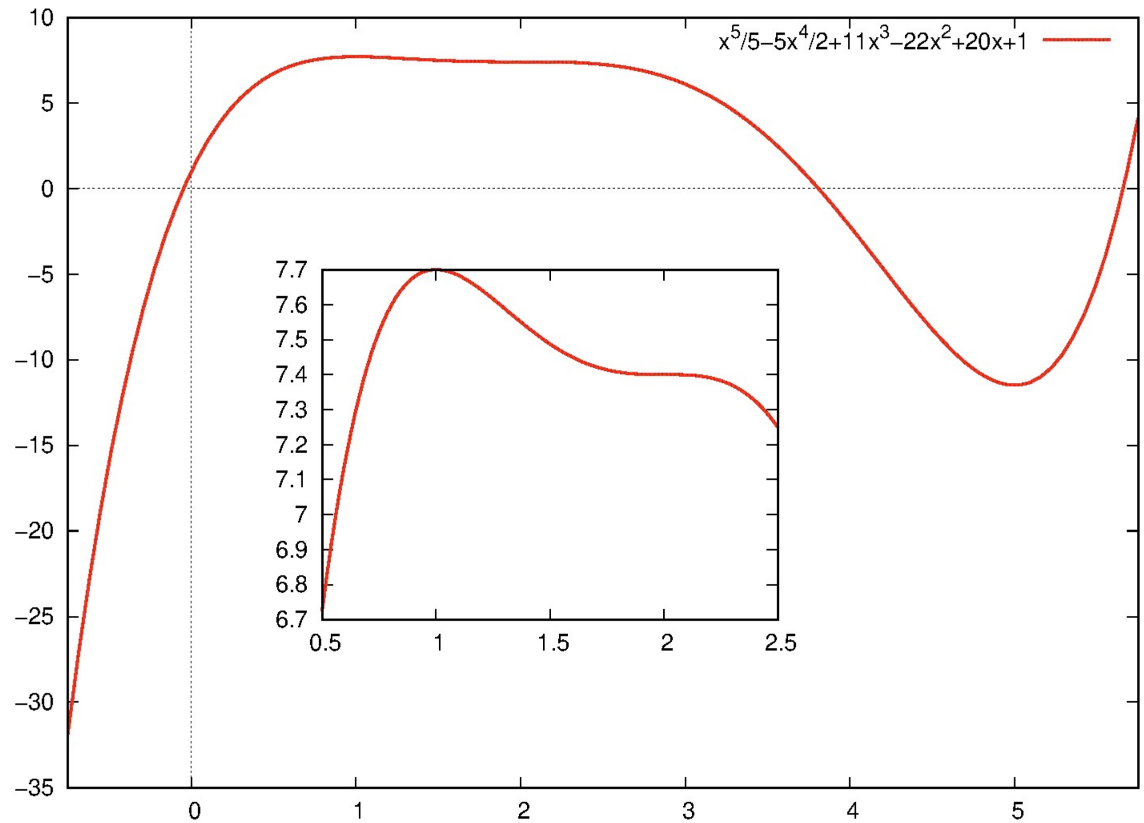
2 pkt

Ponieważ $f''(1) = -4$, w punkcie $x = 1$ funkcja (5a) ma maksimum równe $f_{\text{max}} = \frac{77}{10}$. $f''(5) = 36$, więc jest tam minimum wynoszące $f_{\text{min}} = -\frac{23}{2}$. Aby zbadać charakter punktu $x = 2$ obliczam trzecią pochodną:

$$
\begin{aligned}
f^{(3)}(x) &= 12x^2 - 60x + 66 = 6(2x^2 - 10x + 11) && \text{(5k)} \\
f^{(3)}(2) &= 6(8 - 20 + 11) = -6 \neq 0 && \text{(5l)}
\end{aligned}
$$

a więc nie ma tam ekstremum, a jedynie punkt przegięcia. Pozostałe punkty przecięcia leżą w punktach $x = \frac{11}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$. Funkcja rośnie od $-\infty$ do 1, maleje od 1 do 5 i rośnie od 5 do $+\infty$.

1 pkt


$x^5/5-5x^4/2+11x^3-22x^2+20x+1$
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
−30
−35
0
1
2
3
4
5
7.7
7.6
7.5
7.4
7.3
7.2
7.1
7
6.9
6.8
6.7
0.5
1
1.5
2
2.5