# Fizyka dla firm — Matematyka

## 31. Równania różniczkowe liniowe

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

9 czerwca 2021

## Liniowe równania różniczkowe

Równaniem różniczkowym liniowym rzędu $n$ nazywam równanie

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x) \tag{1}$$

gdzie $a_n(x) \neq 0$ w pewnym pasie $0 \leqslant x \leqslant X$. Na ogół zakłada się, że funkcje $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), f(x)$ są ciągłe. W takim przypadku równanie (1) spełnia założenia twierdzenia Picarda, a wobec tego posiada ono jednoznaczne rozwiązanie.

Równania takie odgrywają ważną rolę w wielu działach matematyki stosowanej.

Jeżeli $f(x) \equiv 0$, równanie (1) nazywa się równaniem jednorodnym. W przeciwnym wypadku mówimy o równaniu niejednorodnym.

**Twierdzenie 1.** *Jeżeli* $y_1(x)$ *i* $y_2(x)$ *są rozwiązaniami jednorodnego równania* (1)*, to także każda kombinacja liniowa* $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ *jest jego rozwiązaniem.*

Równanie (1) możemy zapisać jako

$$\mathbf{L}(x)\, y = f(x) \tag{2}$$

gdzie

$$\mathbf{L}(x) = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x) \tag{3}$$

jest operatorem liniowym w pewnej przestrzeni funkcyjnej (takiej, aby wszystkie różniczkowania były dobrze określone). Widzimy, że wszystkie liniowo niezależne rozwiązania jednorodnego równania (1) rozpinają *jądro* (ang. *kernel*) operatora (3). Elementy jądra nazywa się rozwiązaniami fundamentalnymi.

Istnieą metody znajdywania *analitycznych* rozwiązań pewnych typów równań różniczkowych liniowych o nie-stałych współczynnikach. W ogólności można powiedzieć, że rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest kombinacją liniową rozwiązań fundamentalnych (elementów jądra operatora (3).

## Równanie liniowe rzędu $n$ o stałych współczynnikach

Jeżeli w jednorodnym równaniu (1) wszystkie współczynniki są stałe, $a_k(x) =$ const, otrzymuję jednorodne równanie liniowe o stałych współczynnikach*:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \qquad (4)$$

*W tym wypadku bez straty ogólności można przyjąć, że $a_n = 1$.

Wiadomo, że równanie takie można zastąpić przez pewien układ równań pierwszego rzędu. Za pomocą transformacji omawianej na poprzednim wykładzie otrzymujemy

$$\begin{cases} \dfrac{dy_n}{dx} + a_{n-1}y_n + a_{n-2}y_{n-1} + a_{n-3}y_{n-2} + \cdots + a_1y_2 + a_0y_1 = 0 \\ y_n = \dfrac{dy_{n-1}}{dx} \\ y_{n-1} = \dfrac{dy_{n-2}}{dx} \\ \ldots \\ y_2 = \dfrac{dy_1}{dx} \end{cases} \tag{5}$$

W zapisie macierzowym

$$\frac{d}{dy}\begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ \vdots \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{macierz } n\times n} \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ \vdots \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

W ten sposób równanie (4) sprowadziliśmy do postaci układu $n$ równań liniowych pierwszego rzędu, czyli do równania liniowego rzędu pierwszego w przestrzeni $n$-wymiarowej.

## Rozwiązanie równania jednorodnego o stałych współczynnikach

Postuluję, że rozwiązanie liniowego równania jednorodnego (4) ma postać $y(x) = A\,e^{\lambda x}$, gdzie $A = \text{const}$. Wówczas $dy/dx = \lambda\, y$, $d^2y/dx^2 = \lambda^2\, y$ itd. Po podstawieniu do (4) i podzieleniu stronami przez $e^{\lambda x}$ dostaję

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{7}$$

Równanie (7) jest równaniem wielomianowym stopnia $n$. Posiada ono dokładnie $n$ pierwiastków, licząc z krotnościami. Ponieważ współczynniki równania (7) są rzeczywiste, rozwiązania są albo rzeczywiste, albo parami sprzężone.

Jeżeli wszystkie pierwiastki równania (7) są jednokrotne, *r*ozwiązanie ogólne równania (4) jest kombinacją liniową wyrażeń $\exp(\lambda_k x)$, gdzie $\lambda_k$ są pierwiastkami rownania (7). Jeżeli występuje dwukrotny pierwiastek, powiedzmy $\lambda_s$, w rozwiązaniu pojawiają się człony $\exp(\lambda_s x)$ oraz $x\cdot\exp\lambda_s x$. Dla pierwiastka trójkrotnego — $\exp(\lambda_s x)$, $x \cdot \exp\lambda_s x$ oraz $x^2 \cdot \exp\lambda_s x$ etc.

Ponieważ współczynniki $a_k$ są rzeczywiste, wszystkie pierwiastki $\lambda_k$ są albo rzeczywiste, albo występują w parach sprzężonych. Oznacza to, że otrzymane rozwiązanie jest zawsze rzeczywiste, gdyż stałe można dobrać tak, że wszystkie zespolone funkcje wykładnicze zostaną zastąpione przez kombinacje liniowe funkcji sinus i kosinus.

## Przykład 1

**Oscylator harmoniczny** opisany jest równaniem różniczkowym

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{8a}$$

Zakładamy, że $x = Ae^{\lambda t}$ dostajemy

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \tag{8b}$$

skąd $\lambda = \pm i\omega$ i rozwiązania mają postać

$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{A}e^{i\omega t} + \tilde{B}e^{-i\omega t} \\ &= A\cos\omega t + B\sin\omega t \end{aligned} \tag{8c}$$

Zauważmy, że $A = \tilde{A} + \tilde{B}$, $B = i(\tilde{A} - \tilde{B})$ i jeśli $\tilde{A}^* = \tilde{B}$, rozwiązanie jest rzeczywiste.

## Przykład 2

Rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 10\frac{d^3y}{dy^3} + 35\frac{d^2y}{dx^2} + 50\frac{dy}{dx} + 24y = 0 \tag{9a}$$

ma postać

$$y(x) = A\,e^{-x} + B\,e^{-2x} + C\,e^{-3x} + D\,e^{-4x}\,. \tag{9b}$$

## Przykład 3

Rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{d^3z}{dt^3} + 3\frac{d^2z}{dt^2} + 3\frac{dz}{dt} + z = 0 \tag{10a}$$

ma postać

$$z(t) = A\,e^{-t} + Bt\,e^{-t} + ct^2\,e^{-t}\,. \tag{10b}$$

## Przykład 4

**Tłumiony oscylator harmoniczny** opisywany jest równaniem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{11a}$$

gdzie $\gamma > 0$. Podstawiając $x = e^{\lambda t}$ dostajemy

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0 \tag{11b}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}\gamma \pm \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 - \omega^2} \tag{11c}$$

Musimy teraz rozpatrzyć trzy przypadki, w zależności od znaku wyrażenia podpierwiastkowego.

## I. Przypadek oscylacyjny

$\frac{1}{4}\gamma^2 < \omega^2$. Wówczas $\lambda = -\frac{1}{2}\gamma \pm i\Omega$, gdzie $\Omega = \sqrt{\left|\frac{1}{4}\gamma^2 - \omega^2\right|}$ i rozwiązanie ogólne ma postać tłumionych oscylacji:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{A}e^{-\frac{1}{2}\gamma t}e^{i\Omega t} + \tilde{B}e^{-\frac{1}{2}\gamma t}e^{-i\Omega t} \\ &= Ae^{-\frac{1}{2}\gamma t}\cos(\Omega t) + Be^{-\frac{1}{2}\gamma t}\sin(\Omega t) \\ &= \mathcal{A}e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\cos(\Omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{11d}$$

Dla $\gamma = 0$ otrzymujemy zwykły, niettłumiony oscylator harmoniczny.

## II. Przypadek przetłumiony

$\frac{1}{4}\gamma^2 > \omega^2$. Wówczas obie wartości $\lambda$ są rzeczywiste, różne od siebie i ujemne. Rozwiązanie ogólne przybiera postać

$$x(t) = A\exp\left[-\left(\frac{1}{2}\gamma - \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 - \omega^2}\right)t\right] + B\exp\left[-\left(\frac{1}{2}\gamma + \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 - \omega^2}\right)t\right] \tag{11e}$$

## III. Przypadek graniczny

$\frac{1}{4}\gamma^2 = \omega^2$. Wówczas $\lambda = -\frac{1}{2}\gamma$ jest pierwiastkiem podwójnym i rozwiązanie ogólne przybiera postać

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}\gamma t}(A + Bt) \tag{11f}$$

## Sformułowanie macierzowe

Widzieliśmy, że równanie $n$-tego rzędu (4) jest równoważne $n$-wymiarowemu równaniu pierwszego rzędu (6), którego rozwiązaniem jest

$$\mathbf{y}(x) = \exp\left(\mathbf{A}x\right)\mathbf{y}_0 \tag{12}$$

gdzie $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, natomiast $\mathbf{A}$ jest macierzą z prawej strony równania (6). Jak wiadomo, aby obliczyć funkcję wykładniczą macierzy, należy znać jej wartości i wektory własne. Czy możemy coś powiedzieć o wartościach własnych macierzy $\mathbf{A}$?

Równanie charakterystyczne macierzy $\mathbf{A}$ wyprowadzam korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem pierwszej kolumny:

$$
\det\begin{bmatrix}
-a_{n-1}-\lambda & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 & -a_0 \\
1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda
\end{bmatrix} =
$$

$$
(-a_{n-1}-\lambda)\det\begin{bmatrix}
-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda
\end{bmatrix}
+ \underbrace{(-1)^3\det\begin{bmatrix}
-a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 & -a_0 \\
1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda
\end{bmatrix}}_{\mathcal{W}_2}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^n(a_{n-1}+\lambda)\lambda^{n-1} - \mathcal{W}_2 \\
&= (-1)^n(a_{n-1}+\lambda)\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2}a_{n-2}\lambda^{n-2} + \mathcal{W}_3 = \dots
\end{aligned} \tag{13}
$$

Ostatecznie stwierdzamy, że wartości własne są pierwiastkami równania

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{14}$$

Jest to równanie identyczne z uprzednio wyprowadzonym równaniem (7). Po raz kolejny potwierdza się w ten sposób równoważność podejść poprzez jedno równanie $n$-tego rzędu vs. układ $n$-równań pierwszego rzędu.

 

## Uzmiennianie stałej ☺

Zachodzi następujące
**Twierdzenie:** Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego o stałych współczynnikach jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i dowolnego rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

Twierdzenie to pozwala znaleźć rozwiązanie równania *niejednorodnego* w dość łatwy sposób. Wystarczy więc znaleźć *dowolne* rozwiązanie równania niejednorodnego. Dla “przyjaznych” prawych stron daje się to zrobić metodą *uzmienniania stałej*. Jeżeli $C \cdot \exp(\lambda x)$ jest *jakimś* rozwiązaniem równania jednorodnego, rozwiązania szczegółowego poszukujemy w postaci

$$y = C(x) \cdot \exp(\lambda x) \tag{15a}$$

Wówczas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}\,\mathrm{exp}(\lambda x) + \lambda y(x)\,, \tag{15b}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2C}{dx^2}\,\mathrm{exp}(\lambda x) + 2\frac{dC}{dx}\,\mathrm{exp}\,\lambda x + \lambda^2 y(x)\,, \dots \tag{15c}$$

Wyrażenia (15) wstawiamy do równania niejednorodnego. Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy równanie różniczkowe na $C(x)$, prostsze od równania wyjściowego.

## Przykład 5

Rozwiążmy problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + \alpha\, y & = f(x) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases} \tag{16a}$$

gdzie $\alpha = \text{const}$, a $f(x)$ jest jakąś znaną funkcją. Rozwiązania poszukujemy dla $x \geqslant x_0$.

Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne

$$\frac{dy}{dx} + \alpha\, y = 0\,, \tag{16b}$$

którego rozwiązaniem jest

$$y = A \cdot e^{-\alpha x}\,. \tag{16c}$$

W celu rozwiązania równania niejednorodnego “uzmienniamy stałą”, postulując

$$y(x) = A(x) \cdot e^{-\alpha x}\,, \tag{16d}$$

co po podstawieniu do równania (16a) daje

$$\underbrace{\frac{dA}{dx}\, e^{-\alpha x} - \alpha\, A\, e^{-\alpha x}}_{\frac{dy}{dx}} + \alpha\, \underbrace{A\, e^{-\alpha x}}_{y} = f(x) \tag{16e}$$

$$\frac{dA}{dx} = f(x)\, e^{\alpha x} \tag{16f}$$

wobec czego

$$A(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x')\, e^{\alpha x'}\, dx' + C \tag{16g}$$

gdzie $C$ jest stałą całkowania, której wartość wyznaczymy później z warunku początkowego.

Ostatecznie

$$y(x) = y_0 \, e^{-\alpha(x-x_0)} + \int\limits_{x_0}^{x} e^{-\alpha(x-x')} \, f(x') \, dx' \tag{16h}$$

Zauważmy, że $y(x_0) = y_0$, co jest zgodne z warunkiem początkowym i odpowiada wartości stałej całkowania $C = y_0 \exp(\alpha \, x_0)$.

Jeżeli $\alpha > 0$, dla $x \gg x_0$ pierwszy człon po prawej stronie (16h) staje się zaniedbywalnie mały — układ "zapomina" swoje warunki początkowe. Jeżeli $\alpha < 0$, rozwiązanie staje się rozbieżne.

## Przykład 6

Na gładkim stole leży jednorodny, nierozciągliwy sznur. Początkowo $1/4$ długości sznura zwisa pionowo w dół. Znaleźć czas, po którym cały sznur spadnie ze stołu, jeżeli w chwili $t = 0$ jego prędkość jest równa zeru, a całkowita długość sznura wynosi $l$.

Rozwiązanie: Oznaczmy masę całego sznura przez $m$. Sznur jest jednorodny, więc ma stałą gęstość liniową $\rho_l = m/l$. W danej chwili na stole leży fragment sznura o długości $x$, wobec czego ze stołu zwisa fragment o długości $l-x$. Na zwisający fragment sznura działa siła ciężkości $F = -(l-x) \cdot \rho_l \cdot g$, gdzie $g$ jest przyspieszeniem ziemskim. Siła ta, działając na *cały* sznur, zgodnie z drugą zasadą dynamiki powoduje ruch z przyspieszeniem

$$a = \frac{1}{m} F \,. \tag{17a}$$

Ponieważ

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{17b}$$

musimy rozwiązań równanie różniczkowe

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{m}(l-x)\cdot\frac{m}{l}\,g = -g\left(1-\frac{1}{l}\,x\right) \tag{17c}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{l}\,x = -g \tag{17d}$$

z warunkami początkowymi

$$x\big|_{t=0} = \frac{3}{4}\,l \tag{17e}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \tag{17f}$$

Rozwiązawszy równanie (17d) musimy znaleźć czas, po którym $x = 0$.

 

Zaczynamy od rozwiązania równania jednorodnego

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{l}\,x = 0 \tag{17g}$$

Podstawiamy $x = e^{\lambda t}$. Wówczas $dx/dt = \lambda\, e^{\lambda t}$, $d^2x/dt^2 = \lambda^2\, e^{\lambda t}$. Podstawiając powyższe do (17g) otrzymujemy

$$\lambda^2\, e^{\lambda t} - \frac{g}{l}\, e^{\lambda t} = 0 \tag{17h}$$

$$\lambda^2 - \frac{g}{l} = 0 \tag{17i}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{17j}$$

A zatem rozwiązaniem ogólnym równania (17g) jest

$$x(t) = A\cdot\exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + B\cdot\exp\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \tag{17k}$$

Aby rozwiązać równanie niejednorodne (17d), “uzmienniamy stałą”. Przyjmujemy

$$x = A(t)\,\text{exp}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) \tag{17l}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt}\,\text{exp}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + \sqrt{\frac{g}{l}}\,A\,\text{exp}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) \tag{17m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2A}{dt^2}\,\text{exp}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + 2\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{dA}{dt}\,\text{exp}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + \frac{g}{l}\,A\,\text{exp}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) \tag{17n}$$

Teraz podstawiamy do (17d):

$$\underbrace{\frac{d^2A}{dt^2}\,\text{exp}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + 2\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{dA}{dt}\,\text{exp}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + \frac{g}{l}\,A\,\text{exp}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)}_{\frac{d^2x}{dt^2}}$$

$$-\frac{g}{l}\,\underbrace{A\,\text{exp}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)}_{x} = -g \tag{17o}$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} + 2\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{dA}{dt} = -g\,\text{exp}\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) \tag{17p}$$

Podstawiając $dA/dt = C$ otrzymujemy

$$\frac{dC}{dt} + 2\sqrt{\frac{g}{l}}\,C = -g\,\text{exp}\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right), \tag{17q}$$

które to równanie należy do kategorii omawianej w (16), przy czym całkowanie jest bardzo proste.

$$
\begin{aligned}
C(t) &= \tilde{D}\,\mathrm{exp}\left(-2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) - g\,\mathrm{exp}\left(-2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)\int\limits_0^t \mathrm{exp}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t'\right)dt' \\
&= D\,\mathrm{exp}\left(-2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) - \sqrt{gl}\,\mathrm{exp}\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) && \text{(17r)}\\
A &= \mathcal{D}\,\mathrm{exp}\left(-2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + l\,\mathrm{exp}\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + \mathcal{E} && \text{(17s)}
\end{aligned}
$$

gdzie $\mathcal{D},\mathcal{E}$ są stałymi, których wartość należy ustalić na podstawie warunków początkowych.

Podstawiając do (17l), jako rozwiązanie ogólne równania (17d) dostajemy

$$
x(t) = \mathcal{D}\,\mathrm{exp}\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + \mathcal{E}\,\mathrm{exp}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + l \tag{17t}
$$

Zauważmy, że w rozwiązaniu tym są obecne *oba* rozwiązania fundamentalne występujące w rozwiązaniu równania jednorodnego (17k), natomiast

$x = \text{const} = l$ jest szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego.

Wreszcie na podstawie warunków początkowych ustalamy wartość stałych $\mathcal{D}, \mathcal{E}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D} + \mathcal{E} + l &= \frac{3}{4}\, l && \text{(17u)} \\
-\sqrt{\frac{g}{l}}\,\mathcal{D} + \sqrt{\frac{g}{l}}\,\mathcal{E} &= 0 && \text{(17v)}
\end{aligned}
$$

i ostatecznie

$$
x(t) = l\left(1 - \frac{1}{4}\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)\right) \tag{17w}
$$

Czas, dla którego $x = 0$, wynosi

$$
t_{\text{max}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\operatorname{ar\,cosh} 4 \simeq 2.06\,\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{17x}
$$

## Drgania wymuszone oscylatora

Rozpatrzmy drgania tłumionego oscylatora harmonicznego o częstości własnej $\omega_0$ pod wpływem wymuszenia harmonicznego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t \tag{18a}$$

Jak możemy się domyślić, pełne rozwiązanie jest *możliwe*, ale *żmudne*.

Zamiast tego zauważmy, że rozwiązanie będzie zawierać człony znikające do zera przy $t \to \infty$ oraz człony zawierające wyłącznie całki z wymuszenia harmonicznego, a więc także człony harmoniczne o częstości $\omega$, układ zaś "zapomni" swoje warunki początkowe. Postulujemy zatem, że dla $t \gg 0$ rozwiązanie ma postać asymptotyczną

$$x(t) = \mathcal{A}\cos(\omega t + \varphi) \tag{18b}$$

Podstawiając powyższe do równania, różniczkując i korzystając ze wzorów na sinus i kosinus sumy, dostajemy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(-\omega^2\cos\varphi - \gamma\omega\sin\varphi + \omega_0^2\cos\varphi\right)\cos\omega t \quad &+ \\ \mathcal{A}\left(\ \ \omega^2\cos\varphi - \gamma\omega\sin\varphi - \omega_0^2\cos\varphi\right)\sin\omega t \quad &= \quad A\cos\omega t \end{aligned} \tag{18c}$$

Ponieważ funkcje $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ są liniowo niezależne, dostajemy

$$\left(-\omega^2\cos\varphi - \gamma\omega\sin\varphi + \omega_0^2\cos\varphi\right)\mathcal{A} = A \tag{18d}$$

$$\omega^2\cos\varphi - \gamma\omega\sin\varphi - \omega_0^2\cos\varphi = 0 \tag{18e}$$

skąd możemy wyliczyć $\mathcal{A}$ oraz $\mathrm{tg}\,\varphi$.

Po przekształceniach dostajemy

$$|\mathcal{A}| = \frac{|A|}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}} \tag{18f}$$

Przy ustalonej wartości $\gamma$, amplituda $|\mathcal{A}|$ osiąga maksimum dla $\omega^2 = \omega_0^2$, czyli gdy częstość wymuszenia zewnętrznego zgadza się z częstością własną oscylatora. Zjawisko to nazywamy rezonansem. Wartość tego maksimum dąży do nieskończoności gdy $\gamma \to 0$, czyli gdy tłumienie znika.

## Niejednorodny układ równań liniowych

Rozważmy problem Cauchy'ego zawierający układ równań liniowych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{q}(x) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{19}$$

gdzie $\mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ niekoniecznie jest macierzą stałą. Z układem tym związany jest następujący jednorodny problem *macierzowy*

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbb{I} \end{cases} \tag{20}$$

$\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwane jest rozwiązaniem fundamentalnym równania (19).

Jeżeli macierz $\mathbf{Y}(x)$ jest odwracalna w pasie $0 < x < X$, rozwiązanie niejednorodnego równania (19) dane jest w tym pasie przez

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x)\left[\mathbf{y}_0 + \int\limits_0^x \mathbf{Y}^{-1}(x')\mathbf{q}(x')\,dx'\right] \tag{21}$$