# Fizyka dla firm — Matematyka

## 32. Równania różniczkowe zwyczajne

zarys problematyki

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

2 czerwca 2021

**Problem:** Dane jest wyrażenie matematyczne, wiążące ze sobą funkcję jednej zmiennej i pochodne tej funkcji aż do rzędu $n$. Trzeba znaleźć funkcję, która spełnia to wyrażenie.

Wyrażenie takie nazywamy rónaniem różniczkowym zwyczajnym. Stopień najwyższej pochodnej występującej w wyrażeniu nazywamy rzędem równania.

Jest to problem o olbrzymim znaczeniu, gdyż wiele praw przyrody oraz rozwiązania wielu zagadnień “praktycznych” ma postać równań różniczkowych.

## Postać najbardziej ogólna

Najogólniejszą postacią równania różniczkowego zwyczajnego (ODE, *Ordinary Differential Equation*) rzędu $n$ jest wyrażenie postaci

$$\mathcal{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0\,, \tag{1}$$

gdzie $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lub, niekiedy, $y\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

## Postać standardowa

Jeśli pochodna $F$ po ostatnim argumencie nie znika (przynajmniej lokalnie), na mocy twierdzenia o funkcjach uwikładnych (1) możemy zapisać jako

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right). \tag{2}$$

Trzeba jednak pamiętać, iż transformacja od (1) do (2) może wymagać dookreślenia (w tym sensie równanie (1) może nie być jednoznaczne).

## Przykład 1

Równanie

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1 \tag{3a}$$

można zinterpretować na jeden z dwu sposobów:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}\,, \tag{3b}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1-y^2}\,. \tag{3c}$$

## Przykład 2

Rozważmy równanie

$$(1-y)\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y=0\,. \tag{4}$$

Poza punktem $y=1$ nie ma problemu*. Co zrobić dla $y=1$? Możliwe są *dwa* scenariusze:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=1}=\begin{cases}\phantom{-}1 & \text{lub}\\ -1\end{cases} \tag{5}$$

Który wybrać?

*Pozornie!

## Układy równań pierwszego rzędu

Równanie w postaci (2) na ogół przedstawia się w postaci układu $n$ równań pierwszego rzędu. Najprostsza — co nie oznacza, iż w każdym wypadku najlepsza — transformacja od równania rzędu $n$ do układu $n$ równań pierwszego rzędu ma postać:

$$
\begin{gathered}
y_1 \equiv y\,, \\
\frac{dy}{dx} \equiv \frac{dy_1}{dx} = y_2\,,\ \frac{d^2y}{dx^2} \equiv \frac{dy_2}{dx} = y_3\,,\ \dots\,,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \equiv \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n\,, \qquad (6) \\
\frac{d^ny}{dx^n} \equiv \frac{dy_n}{dx} = \widetilde{F}(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,.
\end{gathered}
$$

Dlatego od tej pory *będziemy się zajmować tak równaniami rzędu $n$, jak i układami $n$ równań rzędu pierwszego*, traktując je jako postaci równoważne.

Układy równań rzędu pierwszego równoważny danemu równaniu rzędu $n$ nie musi mieć postaci sugerowanej przez transformację (6), ale widać, że taka postać nie ogranicza ogólności rozważań.

## Przykład 3

Dane jest równanie

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 4y \tag{7a}$$

Podstawiając $y_1 = y, y_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx}, y_3 = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy_2}{dx}$ widzimy, że równanie różniczkowe rzędu trzeciego (7a) jest równoważne układowi równań rzędu pierwszego:

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \frac{dy_3}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{7b}$$

## Przykład 4

Podstawiając w (7b) $\tilde{y}_1 = y_1 + y_2, \tilde{y}_2 = y_1 - y_2, \tilde{y}_3 = y_3$ otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$\begin{bmatrix} \frac{d\tilde{y}_1}{dx} \\ \frac{d\tilde{y}_2}{dx} \\ \frac{d\tilde{y}_3}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{bmatrix} \tag{7c}$$

inny od (7b), ale *także* równoważny (7a).

## Rozwiązania ogólne i szczególne

Rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego zwyczajnego rzędu $n$ nazywam najbardziej ogólną postać funkcji $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, klasy co najmniej $C_n$, spełniającą równanie (2). Rozwiązanie to zależy od $n$ parametrów.

## Przykład 4

Rozwiązaniem ogólnym równania oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0 \tag{8}$$

jest funkcja

$$y(t) = A \sin(\omega x + \varphi)\,. \tag{9}$$

Rozwiązaniem szczególnym równania różniczkowego zwyczajnego rzędu $n$ jest pewien "przypadek szczególny" rozwiązania ogólnego — taki, w którym wartości wszystkich stałych dowolnych zostały ustalone, najczęściej poprzez podanie warunków, jakie ma spełniać rozwiązanie równania.

## Przykład 5

Rozwiązaniem szczególnym równania oscylatora harmonicznego (8) może być funkcja

$$y(t) = \cos \omega x \,. \tag{10a}$$

*Innym* rozwiązaniem szczególnym tego równania może być funkcja

$$y(t) = -\frac{3}{4} \sin \left( \omega x + \frac{9\pi}{17} \right) . \tag{10b}$$

Dwa rozwiązania (10) odpowiadają innym wartościom stałych w rozwiązaniu ogólnym (9), a więc innym warunkom narzuconym na funkcję spełniającą równanie (8).

Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu $n$ ma $n$ **niezależnych** rozwiązań szczególnych.

Obserwacja: Rozwiązaniem szczególnym układu $n$ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego jest krzywa $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

## Problem Cauchy'ego

Aby znaleźć rozwiązanie szczególne równania różniczkowego zwyczajnego rzędu $n$ — lub równoważnie, układu $n$ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego — należy narzucić $n$ warunków, jakie musi spełniać poszukiwana funkcja i/lub jej pochodne. *Najczęściej* narzuca się te warunki w punkcie odpowiadającym ustalonej wartości zmiennej niezależnej $x_0$ — warunki na funkcję i jej pochodne do rzędu $n-1$ lub na $n$ składowych wektora, gdy mówimy o układzie równań. Tak sformułowany problem: równanie różniczkowe rzędu $n$ i $n$ narzucownych warunków na faunkcję i jej pochodne w jednym punkcie, nazywamy problemem początkowym lub problemem Cauchy'ego.

W języku równań różniczkowych rzędu $n$ problem Cauchy'ego ma postać

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dx^n} & = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \\ y\big|_{x_0} & = y_0 \\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} & = y_1 \\ \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_0} & = y_2 \\ & \vdots \\ \left.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right|_{x_0} & = y_{n-1} \end{cases} \tag{11a}$$

gdzie $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ są pewnymi stałymi, natomiast $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ jest funkcją.

W języku układów $n$ równań pierwszego rzędu problem Cauchy'ego ma postać

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dx} & = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) & = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{11b}$$

gdzie $\mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, a funkcja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$.

Przy odpowiednich zależnościach pomiędzy $F$ a $\mathbf{f}$ oraz $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ a $\mathbf{y}_0$ problemy (11a) i (11b) są równoważne.

## Najczęściej rozwiązywany problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} & = \lambda y \\ y(0) & = y_0 \end{cases} \tag{12}$$

Rozwiązaniem jest $y = y_0 \exp(\lambda x)$. Istotnie, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y_0 \exp(\lambda x)\right) = \lambda\, y_0 \exp(\lambda x) = \lambda y$ oraz $y(0) = y_0 \exp(\lambda \cdot 0) = y_0$.

## Twierdzenie Peana

Powstaje problem: Kiedy problem Cauchy'ego ma rozwiązanie?

**Twierdzenie**: Jeżeli funkcja $\mathbf{f}$ jest ciągła w pasie $x_0 \leqslant x \leqslant X$, to problem Cauchy'ego (11b) ma rozwiązanie w tym pasie.

Tradycyjnie, acz niezgodnie z zasadami polszczyzny, twierdzenie to zwane jest "twierdzeniem Peano".

Uwaga: Twierdzenie Peana nie gwarantuje *jednoznaczności* rozwiązań.

## Przykład 6

Problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= 2\sqrt{|y|} \\ y(0) &= 0 \end{cases} \tag{13}$$

ma co najmniej dwa różne rozwiązania:

$$y_1(x) = 0\,, \tag{14a}$$

oraz

$$y_2(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leqslant 0\,, \\ x^2 & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{14b}$$

(zauważmy, że $dy_2/dx = 2|x|$).

## Twierdzenie Picarda

**Twierdzenie**: Jeżeli funkcja $\mathbf{f}$ jest ciągła w pasie $x_0 \leqslant x \leqslant X$ oraz spełnia warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną:

$$\exists L > 0\ \forall\, x : x_0 \leqslant x \leqslant X,\ \forall\, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 : \|\mathbf{f}(x,\mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x,\mathbf{y}_2)\| \leqslant L\,\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \tag{15}$$

to problem Cauchy'ego (11b) ma w tym pasie rozwiązanie i jest ono jednoznaczne.

**Uwaga:** Jeżeli funkcja jest klasy $C_1$ ze względu na drugą zmienną, spełnia warunek Lipschitza.

## Twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązania od warunków początkowych

**Twierdzenie**: Niech funkcja $\mathbf{f}$ będzie różniczkowalna w sposób ciągły w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Wówczas istnieje takie otoczenie $U \subset \mathbb{R}$ punktu $x_0$ i takie otoczenie $S \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}_0 \in S$, w którym problem Cauchy'ego $d\mathbf{y}/dx = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$, $\mathbf{y}(\tilde{x}) = \tilde{\mathbf{y}}$ ma rozwiązanie dla wszystkich $\tilde{x} \in U$, $\tilde{\mathbf{y}} \in S$. Rozwiązanie to zależy przy tym od punktu początkowego $(\tilde{x}, \tilde{\mathbf{y}})$ w sposób ciągły.

## Równania liniowe i nieliniowe

Jeżeli funkcja $\mathbf{f}$ w problemie Cauchy'ego (11b) jest liniowa ze względu na $\mathbf{y}$, równanie takie (taki układ równań) nazywamy liniowym. O rozwiązaniach (układów) równań liniowych można dużo wywniosokować z rozważań analitycznych.

Nie ma ogólnych metod rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych.

☹

## Równania o zmiennych rozdzielonych

Równanie postaci ($y, p, q \in \mathbb{R}$, zakładamy, że spełnione są założenia twierdzenia Picarda)

$$\frac{dy}{dx} = p(y)q(x) \tag{16}$$

rozwiązujemy jako

$$\int \frac{dy}{p(y)} = \int q(x)dx + C \tag{17}$$

gdzie $C$ jest stałą całkowania. Wartość $C$ wyznaczamy z warunków początkowych.

Uwaga: Nie zwracamy uwagi, czy zależność $y(x)$ można wyznaczyć z równania (17) w posób jawny.

Wszystkie przypadki:

$$\frac{dy}{dx} = -2yx \implies y(x) = y_0 e^{-x^2} \tag{18a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y - e^{-y}} \implies y^2 + e^{-y} = x + C \tag{18b}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin y} \implies \int \frac{dy}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin y}} = x + C \tag{18c}$$

uznajemy za *całkowalne w kwadraturach*, mimo że $y(x)$ jest w (18b) dana w sposób uwikłany, a całka w (18c) jest nieelementarna.

## Przykład 7

Równanie logistyczne. Rozpatrzmy problem Cauchy'ego:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dt} = ry(Y-y) \quad (r = \text{const} > 0, Y = \text{const} > 0) \\
y(0) = y_0 > 0
\end{cases}
\tag{19}
$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych.

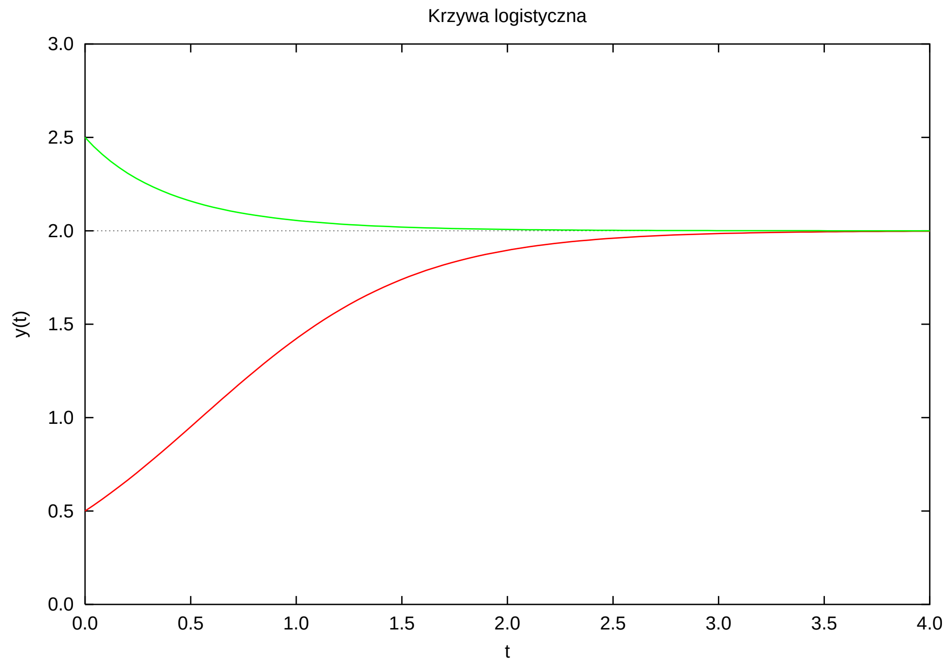
$$\int \frac{dy}{y(Y-y)} = \int r\,dt$$
$$\frac{1}{Y}\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{Y}\int \frac{dy}{Y-y} = rt + C$$
$$\frac{1}{Y}\ln y - \frac{1}{Y}\ln(Y-y) = rt + C$$
$$\ln \frac{y}{Y-y} = Yrt + YC$$
$$\frac{y}{Y-y} = C' e^{Yrt}$$
$$y = \frac{YC'e^{Yrt}}{1+C'e^{Yrt}} = \frac{Y}{1+C''e^{-Yrt}}$$

Stałą $C''$ wyznaczam z warunku początkowego:

$$y_0 = y(0) = \frac{Y}{1+C''} \implies C'' = \frac{Y-y_0}{y_0}$$

Ostatecznie

$$y(t) = \frac{Y}{1 + \frac{Y - y_0}{y_0} e^{-Yrt}}$$



## Całkowanie metodą podstawiania

Niekiedy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{20}$$

daje się sprowadzić do “rozwiązywalnej” postaci metodą podstawiania.

### Przykład 8

Rozpatruję równanie

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \tag{21}$$

Przyjmuję $z = ax + by + c \implies \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$. Wstawiając to do (21) dostaję równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\, f(z)\,. \tag{22}$$

## Przykład 8

Równanie

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + x + \sin y}{\cos y} \tag{23}$$

daje się sprowadzić do prostej postaci po podstawieniu $u = x + \sin y \implies \frac{du}{dx} = \cos y \, \frac{dy}{dx} + 1$. Ostatecznie

$$\frac{du}{dx} = -u \,. \tag{24}$$

## Równania jednorodne[†]

Równania postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{25}$$

całkuje się przez podstawienie $y = xz$. Wówczas $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$. Podstawiając do (25) dostaję równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x}\,. \tag{26}$$

Także równania postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \tag{27}$$

daje się sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych.

[†]Nie mylić z liniowymi równaniami jednorodnymi!

## Równanie Bernoulliego

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n \tag{28}$$

Jeżeli $n = 0$ lub $n = 1$, równanie (28) jest liniowe. W przeciwnym wypadku używam podstawienia

$$y^{1-n} = z \;\Rightarrow\; (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx} \tag{29}$$

Równanie (28) przechodzi w równanie liniowe

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x)z\,. \tag{30}$$

## Równanie Riccatiego

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \tag{31}$$

**Twierdzenie 1.** *Jeżeli* $y_1(x)$ *jest rozwiązaniem szczególnym równania Riccatiego, to podstawienie*

$$y = y_1(x) + \frac{1}{z} \tag{32}$$

*sprowadza równanie* (31) *do równania liniowego*

$$\frac{dz}{dx} + (2a(x)y_1(x) + b(x))z = -a(x)\,. \tag{33}$$

Dowód jest prosty i polega na wykonaniu odpowiedniego podstawienia. Jeżeli $C\gamma(x) + \delta(x)$ jest całką ogólną równania (33) ($C$ jest stałą dowolną), całką ogólną równania (31) jest

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{C\gamma(x) + \delta(x)}\,. \tag{34}$$

## Równanie Clairauta

$$y - x\frac{dy}{dx} - f\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{35}$$

gdzie $f$ jest funkcją różniczkowalną, różną od stałej. Po zróżniczkowaniu (35) otrzymujemy

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \left[x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0 \tag{36}$$

a zatem albo $y'' = 0$, albo $x + f'(y') = 0$. W pierwszym z tych wypadków jako rozwiązanie otrzymujemy rodzinę prostych

$$y = cx + f(c)\,, \tag{37}$$

drugi, wraz z równaniem rodziny prostych (37), daje obwiednię tej rodziny; to rozwiązanie zwane jest *całką osobliwą*.

## Przykład 9

Rozwiązaniami równania

$$y - xy' + \frac{1}{2}y'^2 = 0 \tag{38}$$

są proste

$$y = cx - \frac{1}{2}c^2\,. \tag{39}$$

Całka osobliwa musi spełniać

$$x + f'(cx + f(c)) \equiv x - c = 0 \tag{40}$$

Eliminując $c$ z (39),(40), otrzymujemy obwiednię

$$y = \frac{1}{2}x^2\,. \tag{41}$$

Każda prosta (39) jest styczna do tej obwiedni.

## Pewne jedowymiarowe równania stopnia drugiego...

...ważne ze względu na zastosowania w fizyce:

1.
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \tag{42a}$$
Daje się rozwiązać poprzez dwa całkowania, $y = \int \left(\int f(x)\,dx\right)\,dx + c_1 x + c_2$.

2.
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y) \tag{42b}$$
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, co prowadzi do równania o zmiennych rozdzielonych
$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}\,.$$

3.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \tag{42c}$$

Podstawienie $\frac{dy}{dx} = p$ sprowadza to równanie do równania rzędu pierwszego

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

.

4.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{42d}$$

Podstawiamy $\frac{dy}{dx} = q(y)$, skąd otrzymujemy równanie rzędu pierwszego

$$q\frac{dq}{dy} = f(y, q)$$

## Całki pierwsze równania różniczkowego — niezmienniki

Niech dany będzie problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y_0} \end{cases} \tag{43}$$

posiadający jednoznaczne rozwiązanie w pasie $0 \leqslant x \leqslant X$; $\mathbf{y}, \mathbf{y}_0, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$.

Całką pierwszą — lub niezmiennikiem — równania (43) nazywam dowolną funkcję

$$\Phi(x, \mathbf{y}(x)) \tag{44}$$

która jest stała w pasie $0 \leqslant x \leqslant X$, przy czym $\mathbf{y}(x)$ jest rozwiązaniem problemu (43).

## Przykład 10

Dany jest problem Cauchy'ego

$$\frac{dx}{dt} = u \tag{45a}$$
$$\frac{du}{dt} = -\omega^2 x \tag{45b}$$

z warunkami początkowymi $x(0) = x_0, u(0) = u_0$. Wówczas funkcja

$$H(x, u) = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \tag{46}$$

jest całką ruchu. Istotnie,

$$\frac{dH}{dt} = u\,\frac{du}{dt} + \omega^2 x\,\frac{dx}{dt}x = u(-\omega^2 x) + \omega^2 xu = 0\,. \tag{47}$$

Wartość całki ruchu jest zadana przez warunki początkowe. Jeśli znamy całkę ruchu i warunki początkowe, moglibyśmy wyeliminować jedną zmienną — obniżyć stopień układu o jeden. (Gdybyśmy znali dwie całki ruchu, moglibyśmy obniżyć stopień o dwa itd.) Kontynuując poprzedni przykład, $H(x(0), u(0)) = \frac{1}{2}u_0^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x_0^2 = E$, a ponieważ wartość $H(x, u)$ musi być zachowana, dostajemy

$$u = \pm\sqrt{2E - \omega^2 x^2}\,, \tag{48}$$

a zatem układ równań (45) sprowadza się do *jednego* równania

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2E - \omega^2 x^2}\,. \tag{49}$$

Dowolność wyboru znaku w (49) odpowiada temu, że wyjściowy układ równań ma dwa niezależne rozwiązania.