Fizyka dla firm — Matematyka

31. Całki krzywoliniowe

P. F. Góra
http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

26 maja 2021

Krzywe i łuki

Przypominam, że krzywa to zbiór punktów $\Gamma = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$, a funkcje $\varphi(t), \psi(t)$ są ciągłe*. Punkt $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ nazywam początkiem krzywej, zaś punkt $(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ nazywam końcem.

Łuk (lub łuk Jordana) to krzywa, która nigdzie się nie przecina. Jeżeli łuk posiada w każdym punkcie styczną, nazywamy go łukiem regularnym. Można pokazać, że każdy łuk regularny posiada długość†. Łuk, który można podzielić na skończoną liczbę łuków regularnych, tak, że koniec jednego jest początkiem następnego, nazywa się krzywą regularną.

W tym wykładzie ilekroć będzie mowa o krzywych, będziemy mieli na myśli krzywe regularne.

*Pomijamy tu krzywe rozciągające się na przedziałach nieskończonych.

†Krzywe “patologiczne”, jak krzywa Peano, nie muszą posiadać długości.

Całka krzywoliniowa

Całka oznaczona jednej zmiennej “sumuje” zmiany, jakim podlega funkcja, gdy jej argument przebiega pewien przedział $[a, b]$. Gdy mamy funkcję dwu zmiennych, możemy pytać się, jak zmienia się ta funkcja, gdy jej argumenty zakreślają pewną krzywą (łuk) oraz “zsumować” te zmiany.

Niech na krzywej Γ będą określone *dwie* funkcje $u(x, y), v(x, y)$. Podzielmy przedział $[\alpha, \beta]$ na podprzedziały $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$, a każdym przedziale $[t_{i-1}, t_i]$ wybierzmy pewien punkt $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Tworzymy sumę

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left[u(x(\theta_i), y(\theta_i))\,(x(t_i) - x(t_{i-1})) + v(x(\theta_i), y(\theta_i))\,(y(t_i) - y(t_{i-1}))\right] \tag{1}$$

Jeżeli granica ciągu $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ istnieje, gdy $n \to \infty$ i długość największego podprzedziału $|t_i - t_{i-1}| \to 0$, a granica ta nie zależy od sposobu wyboru punktów pośrednich θ_i, nazywam ją całką krzywoliniową z $u\,dx + v\,dy$ po drodze Γ i oznaczam

$$\int\limits_{\Gamma} u\,dx + v\,dy \tag{2}$$

.

Własności całki krzywoliniowej

Jeżeli $\zeta \in [\alpha, \beta]$, wówczas $[\alpha, \beta] = [\alpha, \zeta] \cup [\zeta, \beta]$, a łuk $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. W takim wypadku zachodzi

$$\int\limits_{\Gamma} = \int\limits_{\Gamma_1} + \int\limits_{\Gamma_2} \tag{3}$$

Jeżeli odwrócimy bieg zmiennej opisującej krzywą, $[\alpha, \beta] \to [\beta, \alpha]$, możemy powiedzieć, że $\Gamma \to -\Gamma$. Wówczas

$$\int\limits_{\Gamma} = -\int\limits_{-\Gamma} \tag{4}$$

Jeżeli jedna z funkcji u, v jest na krzywej Γ stale równa zeru, wówczas całka (2) redukuje się do, odpowiednio, $\int_\Gamma u\,dx$ lub $\int_\Gamma v\,dy$.

Zamiana całki krzywoliniowej na oznaczoną

Twierdzenie: Jeżeli funkcje $u(x,y), v(x,y)$ są ciągłe na łuku regularnym, to całka krzywoliniowa (2) istnieje i równa się całce oznaczonej

$$\int\limits_{\Gamma} u\,dx + v\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[u(\varphi(t),\psi(t))\frac{d\varphi}{dt} + v(\varphi(t),\psi(t))\frac{d\psi}{dt} \right] dt \tag{5}$$

Przykład 1

Obliczmy całkę

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma} (x - y)\, dx + (x + y)\, dy \tag{6a}$$

gdzie Γ jest półelipsą $x = a \cos t\,,\; y = b \sin t\,,\; t \in [0, \pi]$.

Stosując powyższe twierdzenie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_0^\pi [(a \cos t - b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t + b \sin t)\, b \cos t]\, dt \\ &= \int\limits_0^\pi \left[ab - \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \sin 2t\right] dt = \pi ab \end{aligned} \tag{6b}$$

Przykład 2

Obliczmy całkę

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma} y\,dx + x\,dy \tag{7a}$$

gdzie Γ jest łukiem okręgu $x = r\cos t\,,\ y = r\sin t\,,\ t \in [0, \alpha]$.

$$I_2 = \int\limits_0^{\alpha} (-r^2\cos t + r^2 \sin t)\,dt = r^2 \int\limits_0^{\alpha} \cos 2t\,dt = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha \tag{7b}$$

Twierdzenie Greena

Krzywa zamknięta to taka krzywa, której koniec pokrywa się z początkiem. Całkę krzywoliniową po takiej krzywej oznaczamy symbolem $\oint_\Gamma$.

Twierdzenie Greena: Jeżeli funkcje $u(x,y), v(x,y)$ są klasy C_1 na krzywej zamkniętej Γ i wewnątrz obszaru D, którego brzegiem jest ta krzywa, to

$$\oint\limits_\Gamma u\,dx + v\,dy = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy \tag{8}$$

Zakładamy, że brzeg obszaru D, czyli krzywa Γ, jest skierowany dodatnio, to znaczy jest obchodzony przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara; przeciwna orientacja brzegu zmienia znak po prawej stronie.

Całka różniczki zupełnej

Jeżeli forma różniczkowa

$$DQ = u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy \tag{9a}$$

jest różniczką zupełną

$$DQ = df\,, \text{ gdzie } \frac{\partial f}{\partial x} = u(x,y)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = v(x,y) \tag{9b}$$

to całka po krzywej zamkniętej

$$\oint\limits_{\Gamma} df \equiv \oint\limits_{\Gamma} u\,dx + v\,dy = 0 \tag{10}$$

Jest to wniosek z twierdzenia Greena.

Przykład 3

Niech

$$DQ = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx - \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dy \tag{11a}$$

Obliczmy całkę z (11a) po okręgu $K_3 : (x-2)^2 + y^2 = 1$. Okręg ten możemy przedstawić parametrycznie w postaci

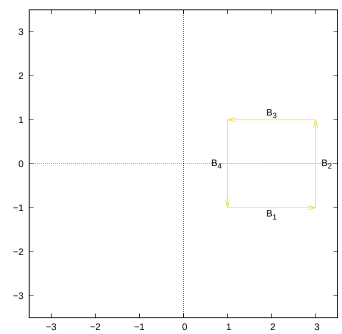
$$\begin{cases} x &= 2 + \cos t \\ y &= \sin t \end{cases} \tag{11b}$$

Mamy zatem

$$
\begin{aligned}
I_3 = \oint\limits_{K_3} DQ &= -\int\limits_0^{2\pi} \frac{(2+\cos t)(-\sin t) + \sin t \cos t}{(5+4\cos t)^{3/2}}\, dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \frac{2\sin t}{(5+4\cos t)^{3/2}}\, dt \\
&= \left.\frac{1}{\sqrt{5+4\cos t}}\right|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \qquad (11c)
\end{aligned}
$$

Przykład 4

Niech DQ ma postać (11a), ale niech drogą całkowania K_4 będzie kwadrat o wierzchołkach, kolejno, $(1, -1), (3, -1), (3, 1), (1, 1)$. Oznaczmy kolejne boki kwadratu B_1, B_2, B_3, B_4.



Mamy

$$
\begin{aligned}
I_4 = \oint\limits_{K_4} DQ &= \int\limits_{B_1} DQ + \int\limits_{B_2} DQ + \int\limits_{B_3} DQ + \int\limits_{B_4} DQ \\
&= -\int\limits_{1}^{3} \frac{x\,dx}{(x^2+(-1)^2)^{3/2}} - \int\limits_{-1}^{-1} \frac{(-1)\,dy}{(x^2+(-1)^2)^{3/2}} && \text{(12a)} \\
&\quad -\int\limits_{3}^{3} \frac{3\,dx}{(3^2+y^2)^{3/2}} - \int\limits_{-1}^{1} \frac{y\,dy}{(3^2+y^2)^{3/2}} && \text{(12b)} \\
&\quad -\int\limits_{3}^{1} \frac{x\,dx}{(x^2+1^2)^{3/2}} - \int\limits_{1}^{1} \frac{1\,dy}{(x^2+1^2)^{3/2}} && \text{(12c)} \\
&\quad -\int\limits_{1}^{1} \frac{1\,dx}{(1^2+y^2)^{3/2}} - \int\limits_{1}^{-1} \frac{y\,dy}{(1^2+y^2)^{3/2}} && \text{(12d)}
\end{aligned}
$$

(12a) odpowiada całce po B_1, (12b) odpowiada całce po B_2, (12c) odpowiada całce po B_3, a (12d) odpowiada całce po B_4.

Całki po dx w (12b) i (12d) znikają, podobnie jak całki po dy w (12a) i (12c). Wobec tego

$$\begin{aligned} I_4 &= -\left(\int_1^3 + \int_3^1\right) \frac{x\,dx}{(x^2+1^2)^{3/2}} \\ &\quad - \int_{-1}^{1} \frac{y\,dy}{(9+y^2)^{3/2}} - \int_{1}^{-1} \frac{y\,dy}{(1+y^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{12e}$$

Całki po dx znoszą się wzajemnie, natomiast obie całki po dy znikają, gdyż funkcje podcałkowe są nieparzyste, a przedziały całkowania symetryczne względem 0. Ostatecznie

$$I_4 = 0 \tag{12f}$$

Wyniki dwu ostatnich przykładów nie powinny dziwić: forma różniczkowa (11a) jest różniczką zupełną,

$$DQ = d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \tag{13}$$

a zgodnie z wnioskiem z twierdzenia Greena, całka po *dowolnej* krzywej zamkniętej z różniczki zupełnej znika.

Przykład 5

Ponownie scałkujmy formę różniczkową (11a), lecz tym razem drogą całkowania jest okrąg $K_5 : (x-1)^2+y^2 = 1$. Parametryzacja drogi całkowania ma postać

$$\begin{cases} x & = 1 + \cos t \\ y & = \sin t \end{cases} \tag{14a}$$

a wobec tego

$$\begin{aligned} I_5 = \oint\limits_{K_5} DQ &= -\int\limits_0^{2\pi} \frac{(1+\cos t)(-\sin t) + \sin t \cos t}{(2(1+\cos t))^{3/2}}\, dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin t}{(1+\cos t)^{3/2}}\, dt \end{aligned} \tag{14b}$$

Do tej całki musimy podejść ostrożnie, gdyż funkcja podcałkowa nie jest określona w punkcie $t = \pi$. Możemy napisać

$$
\begin{aligned}
I_5 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_0^{\pi-\varepsilon_1} \frac{\sin t}{(1+\cos t)^{3/2}}\, dt \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{\pi+\varepsilon_2}^{2\pi} \frac{\sin t}{(1+\cos t)^{3/2}}\, dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left. \frac{4\cos^2 \frac{t}{2}}{(1+\cos t)^{3/2}} \right|_0^{\pi-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \left. \frac{4\cos^2 \frac{t}{2}}{(1+\cos t)^{3/2}} \right|_{\pi+\varepsilon_2}^{2\pi} \right)
\end{aligned}
\tag{14c}
$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$I_5 = \sqrt{2}\left(\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{\sin^2\frac{\varepsilon_1}{2}}{(1-\cos\varepsilon_1)^{3/2}} - \lim_{\varepsilon_2\to 0}\frac{\sin^2\frac{\varepsilon_2}{2}}{(1-\cos\varepsilon_2)^{3/2}}\right) \tag{14d}$$

Podwójna granica (14d) nie istnieje. Istotnie, dla $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ otrzymalibyśmy wartość $I_5 = 0$, ale dla $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ otrzymalibyśmy $I_5 = -\infty$.

Konkludując, całka I_5 nie istnieje. Różnica pomiędzy przykładami ze stron 11,13 a 17 wynika z tego, że dla krzywej K_5 założenia twierdzenia Greena nie są spełnione, gdyż forma różniczkowa (11a) nie jest określona na *całej* drodze całkowania.

Niezależność od drogi całkowania

Niech Γ_1, Γ_2 będą krzywymi regularnymi, które mają wspólny punkt początkowy (x_a, y_a) i końcowy (x_b, y_b). Niech $f(x, y)$ będzie funkcją klasy C_2 na obu tych krzywych; df jest różniczką zupełną. Wówczas

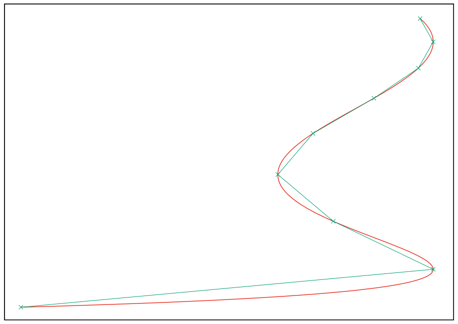
$$\int\limits_{\Gamma_1} df = \int\limits_{\Gamma_2} df = f(x_b, y_b) - f(x_a, y_a) \tag{15}$$

Zwróćmy uwagę, że jest to zgodne z twierdzeniem Greena.

Długość łuku

Niech będzie dany pewien łuk regularny $\Gamma = \{(x = \varphi(t), y = \psi(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$. Ile wynosi długość tego łuku?

Aby to określić, podzielmy przedział $[\alpha, \beta]$ jak przy definiowaniu całki krzywoliniowej: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$. Wartości t_i określają punkty $(x_i, y_i) \in \Gamma$. Poprowadźmy przez te punkty łamaną.



Łamana ta jest przybliżeniem łuku, więc jej długość jest przybliżeniem długości łuku. Długość łamanej wynosi

$$
\begin{aligned}
d_n &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Ponieważ łuk jest gładki, pochodne φ', ψ' istnieją i są ciągłe na $[\alpha, \beta]$. Na mocy twierdzenia o wartości średniej w każdym przedziale $[t_{i-1}, t_i]$ istnieje θ_i takie, że

$$
\begin{aligned}
\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\theta_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\theta_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

a wobec tego (16) przechodzi w

$$
d_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\theta_i))^2 + (\psi'(\theta_i))^2}(t_i - t_{i-1}) \qquad (18)
$$

Jest to suma Riemanna, która przy $n \to \infty$ dąży do całki

$$d = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}\, dt \tag{19}$$

Jest to poszukiwany wzór na długość łuku regularnego.

Wniosek: Długość wykresu funkcji $y = f(x)$, gdzie f jest klasy C_1, na przedziale $[a, b]$ wynosi

$$d = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \tag{20}$$

Całka krzywoliniowa nieskierowana

Niech krzwa Γ będzie łukiem regularnym, a funkcja $f(x, y)$ niech będzie określona na tym łuku. Podzielmy przedział $[\alpha, \beta]$ na podprzedziały $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$, a każdym przedziale $[t_{i-1}, t_i]$ wybierzmy pewien punkt $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Każdemu przedziałowi $[t_{i-1}, t_i]$ odpowiada łuk o długości

$$\Delta S_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2} \, dt \tag{21}$$

Tworzymy sumę

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\theta_i), \psi(\theta_i)) \, \Delta S_i \tag{22}$$

Jeżeli, przy zwykłych założeniach, granica ciągu $\{\sigma_n\}$ istnieje, nazywam ją całką krzywoliniową nieskierowaną funkcji $f(x,y)$ po krzywej Γ i oznaczam

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,ds \tag{23}$$

Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła na krzywej Γ, całka (23) wyraża się przez

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}\,dt \tag{24}$$

Uogólnienie na $\mathbb{R}^3$

Pojęcie krzywej można uogólnić na trzy wymiary: $\Gamma = \{(\varphi(t), \psi(t), \xi(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$, a funkcje φ, ψ, ξ są ciągłe na $[\alpha, \beta]$. Jeżeli teraz mamy formę róniczkową

$$DQ = u(x, y, z)\, dx + v(x, y, z)\, dy + w(x, y, z)\, dz \tag{25}$$

możemy, podobnie jak poprzednio, określić całkę krzywoliniową

$$\int\limits_{\Gamma} u\, dx + v\, dy + w\, dz \tag{26}$$

oraz całkę krzywoliniową nieskierowaną. Jeśli $DQ = df$ jest różniczką zupełną, określoną na krzywych Γ_1, Γ_2 o wspólnych punktach początkowych i końcowych, całka krzywoliniowa nie zależy od drogi

$$\int\limits_{\Gamma_1} df = \int\limits_{\Gamma_2} df = f(x_b, y_b, z_b) - f(x_a, y_a, z_a) \tag{27}$$

Interpretacja wektorowa

Niech $\mathbf{a}(a, y, z)$ będzie polem wektorowym, czyli, formalnie, funkcją $\mathbf{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Niech $\mathbf{a} = [u, v, w]$, czyli funkcje u, v, w są składowymi pola wektorowego $\mathbf{a}$. Jeżli pole wektorowe jest klasy C_1, możemy zdefiniować jego dywergencję

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \nabla \circ \mathbf{a} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{28}$$

oraz rotację

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\mathbf{y} & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \tag{29}$$

Jeżeli forma różniczkowa $DQ = u\,dx + v\,dy + w\,dz$ jest różniczką zupełną, $DQ = df$, funkcję $f(x, y, z)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\mathbf{a}$.

Twierdzenie: Całka krzywoliniowa (26) nie zależy od drogi, a pole wektorowe $\mathbf{a}$ ma potencjał wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = 0$.

Wniosek: Forma różniczkowa $DQ = u\,dx + v\,dy + w\,dz$ jest różniczką zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = 0$, gdzie $\mathbf{a}$ jest wektorem o składowych $[u, v, w]$.

Pole wektorowe płaskie

Jeżeli w polu wektorowym $\mathbf{a} = [u, v, w]$ $w \equiv 0$, pole takie nazywamy płaskim[‡]. Niech będzie dana dowolna krzywa regularna zamknięta Γ. Oznaczmy przez $\mathbf{a}_s$ składową pola $\mathbf{a}$ styczną do krzywej Γ, a przez $\mathbf{a}_n$ składową normalną. D jest obszarem, którego brzegiem jest Γ. Wówczas twierdzenie Greena można zapisać w postaci

$$\iint\limits_D \operatorname{div} \mathbf{a}\, dx\, dy = \oint\limits_\Gamma \mathbf{a}_n\, ds \tag{30}$$

co interpretujemy: *całka z dywergencji pola wektorowego w obszarze płaskim jest równa strumieniowi pola poprzez brzeg tego obszaru*.

[‡]Funkcje $u(x, y, z), v(x, y, z)$ zależą także od zmiennej z. Jednak przy ustalonym z możemy jego wartość traktować jako parametr, a funkcje u, v zależą tylko od x, y. Trójwymiarowe pole $\mathbf{a}$ staje się wtedy kolekcją *płaskich* pól wektorowych, indeksowaną zmienną z.

Ponadto

$$\oint\limits_{\Gamma} \mathbf{a}_s \, ds = \iint\limits_{D} \mathrm{rot}\, \mathbf{a} \, dx \, dy \tag{31}$$