

# Fizyka dla firm — Matematyka

## 30. Całki wielokrotne

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

19 maja 2021

## Całka oznaczona funkcji dwóch zmiennych

Całkę oznaczoną funkcji dwóch zmiennych definiujemy podobnie jak całkę Riemanna funkcji jednej zmiennej.

Niech będzie dany pewien obszar  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Obszar  $D$  dzielimy na elementy  $d_i$  takie, że  $\bigcup_i d_i = D$  oraz poszczególne elementy  $d_i, d_j$  mają co najwyżej wspólne krawędzie (formalnie:  $\forall i, j : i \neq j \Rightarrow \mu(d_i \cap d_j) = 0$ ), gdzie  $\mu(\cdot)$  oznacza miarę (powierzchnię) jakiegoś podzbioru  $\mathbb{R}^2$ . Następnie w każdym elemencie  $d_i$  wybieramy punkt  $(x_i, y_i)$  i tworzymy sumę Riemanna

$$S_i = \sum_i f(x_i, y_i) \mu(d_i). \quad (1)$$

Jeżeli granica ciągu  $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$  przy  $\max(\mu(d_i)) \rightarrow 0$  istnieje i *nie zależy od sposobu wyboru punktów*  $(x_i, y_i)$ , nazywamy ją **całką funkcji  $f(x, y)$  po obszarze  $D$** :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{i \rightarrow \infty} S_i \quad (2)$$

**Twierdzenie:** Jeżeli funkcja jest ciągła i ograniczona na obszarze  $D$ , jej całka (2) po tym obszarze istnieje.

Powyższą definicję i twierdzenie łatwo uogólnić na całki funkcji trzech, czterech, ... zmiennych.

## Powierzchnia i objętość

Ponieważ  $\bigcup_i d_i = D$ ,  $\sum_i \mu(d_i) = \mu(D)$ . Z (2) natychmiast wynika, że

$$\iint_D dx dy = \mu(D) \quad (3)$$

czyli całka  $\iint_D dx dy$  daje w wyniku powierzchnię (miarę) obszaru całkowania.

Z kolei występujące w sumie (1) wyrażenia  $f(x_i, y_i) \cdot \mu(d_i)$  możemy interpretować jako objętości graniastosłupów (krzywoliniowych) o podstawie  $d_i$  i wysokości  $f(x_i, y_i)$ ,  $(x_i, y_i) \in d_i$ . Wobec tego całkę (2) możemy interpretować jako objętość zawartą pomiędzy dwuwymiarowym wykresem funkcji  $f(x, y)$  a obszarem  $D$ , przy czym przyczynki odpowiadające ujemnym wartościom funkcji  $f$  traktujemy jako ujemne.

## Całki iterowane

**Twierdzenie o całkach iterowanych (twierdzenie Fubiniego):** Niech dany będzie obszar  $D \subset \mathbb{R}^2$  ograniczony nierównościami

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \quad (4)$$

przy czym funkcje  $\varphi, \psi$  są ciągłe. Wówczas **jeżeli istnieje całka**

$$\iint_D f(x, y) dx dy, \quad (5)$$

to jest ona równa

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (6)$$

## Komentarze

1. Wewnętrzną całkę w (6) obliczamy tak, jakby  $x$  było parametrem o ustalonej wartości. Obliczona całka wewnętrzna, po uwzględnieniu granic całkowania, jest funkcją zmiennej  $x$  i staje się funkcją podcałkową całki zewnętrznej w (6).

2. Jeżeli zamiast (4) mamy ograniczenie postaci

$$p \leq y \leq q, \quad \tilde{\varphi}(y) \leq x \leq \tilde{\psi}(y) \quad (7)$$

wówczas w miejsce (6) mamy

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_p^q dy \int_{\tilde{\varphi}(y)}^{\tilde{\psi}(y)} f(x, y) dx. \quad (8)$$

**3.** Funkcje  $\varphi, \psi$  (lub  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ ) mogą być stałe. Oznacza to, że dla całkowania po prostokącie

$$\iint_{[a,b] \times [p,q]} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_p^q f(x, y) dy = \int_p^q dy \int_a^b f(x, y) dx . \quad (9)$$

**4.** Twierdzenie o całkach iterowanych oraz powyższe komentarze łatwo uogólnić na przypadek całek trój- i więcejwymiarowych.

## Przykład 1

Obliczmy pole okręgu  $x^2 + y^2 = R^2$ . Zauważmy, że, po pierwsze,  $-R \leq x \leq R$ , a po drugie, przy ustalonym  $x$ ,  $-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ .

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} dx dy = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \\ &= 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left[ \begin{array}{l} x = R \sin t \\ dx = R \cos t dt \\ -R \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ R \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] \\ &= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2R^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi R^2 \end{aligned} \quad (10)$$



## Przykład 2

Obliczmy całkę z funkcji  $\sin x \cdot \cos y$  po prostokącie  $D = [0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ .

$$\begin{aligned} \iint_D \sin x \cos y \, dx \, dy &= \int_0^{\pi} \sin x \, dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y \, dy \\ &= (-\cos x|_0^{\pi}) \cdot \left( \sin y|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = 4 \quad (11) \end{aligned}$$

### Przykład 3

Niech obszar  $D$  będzie trójkątem wyznaczonym przez punkty  $(0, 0)$ ,  $(\pi/2, \pi/2)$ ,  $(\pi/2, -\pi/2)$ . Obliczmy

$$\begin{aligned} \iint_D \sin(x+y) dx dy &= \int_0^{\pi/2} dx \int_{-x}^x \sin(x+y) dx = \left[ \begin{array}{l} y = t - x, dy = dt \\ -x \rightarrow 0, x \rightarrow 2x \end{array} \right] \\ &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{2x} \sin t dt = \int_0^{\pi/2} \left( -\cos t \Big|_0^{2x} \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos t dt = \frac{\pi}{2} \quad (12) \end{aligned}$$

## Przykład 4

Niech  $D$  będzie obszarem ograniczonym prostymi  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $x = -1$ ,  $y = -2$ . Obliczmy

$$\begin{aligned}\iint_D (6 - x^2 - y^2) dx dy &= \int_{-2}^2 dy \int_{-1}^1 (6 - x^2 - y^2) dx \\ &= \int_{-2}^2 \left( 6x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2 \right) \Big|_{-1}^1 dy \\ &= \int_{-2}^2 \left( \frac{34}{3} - 2y^2 \right) dy = \frac{104}{3} \quad (13)\end{aligned}$$

## Przykład 5

Obliczmy

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (xy)^2 dx dy \quad (14a)$$

Jak poprzednio,  $-R \leq x \leq R$ , a przy ustalonym  $x$ ,  
 $-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ . Mamy zatem

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (xy)^2 dy = \int_{-R}^R x^2 dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy \\
&= \int_{-R}^R x^2 \left( \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \right) dx = \frac{2}{3} \int_{-R}^R x^2 (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\
&= \frac{2}{3} R^6 \int_{-1}^1 t^2 (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{\pi}{24} R^6 \tag{14b}
\end{aligned}$$

## Zmiana zmiennych w całce wielokrotnej

Niech

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \quad (15)$$

Niech odwzorowanie to przekształca pewien obszar  $\Delta$  (w zmiennych  $u, v$ ) na obszar  $D$  (w zmiennych  $x, y$ ), przy czym zachodzi

- (i) funkcje  $\varphi, \psi$  są klasy  $C_1$  w obszarze  $\Delta$ ,
- (ii) funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła w obszarze  $D$ ,
- (iii) odwzorowanie wnętrza obszaru  $\Delta$  w obszar  $D$  jest wzajemnie jednoznaczne,
- (iv) wewnątrz obszaru  $D$  jacobian

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0. \quad (16)$$

Wówczas

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv \quad (17)$$

Przy zmianie zmiennych do funkcji podcałkowej wchodzi wartość bezwzględna jakobianu.

Twierdzenie to uogólnia się na całki trój- i więcejwymiarowe.

## Przykład 6

Obliczmy jeszcze raz całkę (14a), tym razem korzystając ze zmiany zmiennych na współrzędne biegunowe:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (xy)^2 dx dy = \left[ \begin{array}{l} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{array} \right] \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r (r^2 \sin \phi \cos \phi)^2 dr \\ &= \frac{1}{4} \left( \int_0^{2\pi} \sin^2(2\phi) d\phi \right) \cdot \left( \int_0^R r^5 dr \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \frac{1}{6} R^6 = \frac{\pi}{24} R^6 \end{aligned} \quad (18)$$



## Przykład 7

Niech obszar  $D$  będzie kwadratem ograniczonym prostymi  $y = \pm x \pm 1$ .  
Obliczmy całkę

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} dx dy \quad (19a)$$

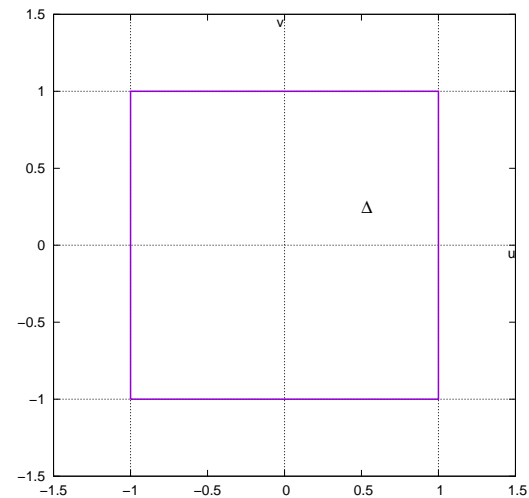
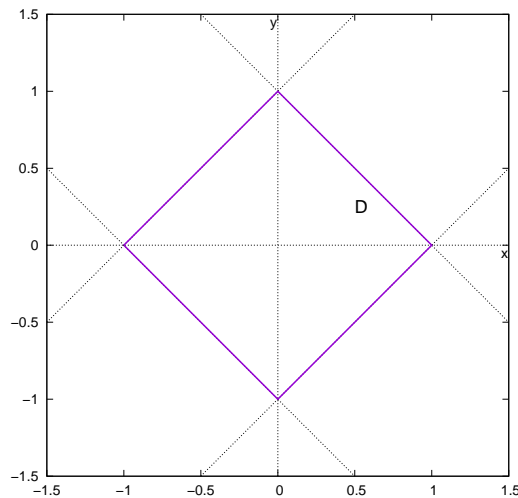
Dokonajmy następującej zmiany zmiennych:

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}(u + v) \\ y &= \frac{1}{2}(u - v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y &= u \\ x - y &= v \end{cases} \quad (19b)$$

Jakobian przekształcenia (19b) wynosi

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \quad (19c)$$

a obszar  $D$  jest obrazem obszaru  $\Delta$ , będącego kwadratem ograniczonym prostymi  $u = \pm 1, v = \pm 1$ .



Wobec tego

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{\Delta} \frac{\frac{1}{4}(u+v)^2 - \frac{1}{4}(u-v)^2}{1 + \frac{1}{4}(u+v)^2 + \frac{1}{4}(v-v)^2} \left| -\frac{1}{2} \right| du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u du \int_{-1}^1 \frac{v}{1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2} dv \\ &= 0, \tag{19d}\end{aligned}$$

gdyż funkcja podcałkowa w wewnętrznej całce jest nieparzysta (ze względu na zmienną  $v$ ), a całkowanie przebiega po przedziale symetrycznym.

## Przykład 8

Typowym zastosowaniem całek wielokrotnych w fizyce jest obliczanie potencjałów lub sił grawitacyjnych pochodzących od rozmaitych układów mas.

Znajdź grawitacyjną energię potencjalną punktu materialnego o masie  $m$ , umieszczonego w odległości  $L$  od środka jednorodnej kuli o masie  $M$  i promieniu  $R$ , przyt czym  $L > R$ .

Energia potencjalna dwu punktów materialnych o masach  $m_1, m_2$  znajdujących się w odległości  $d$  od siebie wynosi

$$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{d} \quad (20a)$$

Wprowadźmy układ współrzędnych o środku w środku kuli; niech badany punkt materialny leży w punkcie o współrzędnych  $(0, 0, L)$ . Wyobraźmy

sobie infinitezymalnie mały element kuli leżący w punkcie  $(x, y, z)$  i o objętości  $dx dy dz$ . Przyczynek do energii potencjalnej pochodzący od tego elementu wynosi

$$dE = -\frac{Gm\rho}{\sqrt{x^2 + y^2 + (L - z)^2}} dx dy dz \quad (20b)$$

gdzie

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (20c)$$

jest gęstością kuli.

Całkowitą energię potencjalną obliczymy całkując  $dE$  po całej objętości kuli:

$$E = -\frac{3GmM}{4\pi R^3} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (L - z)^2}} \quad (20d)$$

Wprowadźmy współrzędne sferyczne

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \cos \phi \\ y &= r \cos \theta \sin \phi \\ z &= r \sin \theta \end{cases} \quad (20e)$$

przy czym  $\phi \in [0, 2\pi]$ ,  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $r \in [0, R]$ . Jakobian odwzorowania (20e) wynosi  $r^2 \cos \theta$ . Mamy więc

$$E = -\frac{3GmM}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^2 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \sin \theta}} \quad (20f)$$

Pierwsza całka daje  $2\pi$ . Zajmijmy się najbardziej wewnętrzną całką:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \sin \theta}} &= \left[ \begin{array}{l} \sin \theta = t \\ \cos \theta \, d\theta = dt \\ -\pi/2 \rightarrow -1 \\ \pi/2 \rightarrow 1 \end{array} \right] \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lrt}} \\
 &= -\frac{1}{Lr} \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lrt} \Big|_{-1}^1 \\
 &= -\frac{1}{Lr} \left( \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr} - \sqrt{L^2 + r^2 + 2Lr} \right) \\
 &= -\frac{1}{Lr} (L - r - (L + r)) = \frac{2}{L} \qquad (20g)
 \end{aligned}$$

gdyż  $L > r$ .

Zatem

$$E = -2\pi \cdot \frac{3GmM}{4\pi R^3} \cdot \frac{2}{L} \int_0^R r^2 dr = -\frac{GmM}{L} \quad (20h)$$

W punkcie leżącym na zewnątrz jednorodnej kuli energia potencjalna grawitacji ma taką samą postać, jak energia pochodząca od punktu materialnego o masie równej masie kuli, umieszczonego w środku kuli.



## Przykład 9

Znaleźć wartość siły, z jaką przyciągają się dwa jednorodne odcinki o długościach  $l_1$  i  $l_2$ , leżące na jednej prostej, jeżeli masa pierwszego wynosi  $m_1$ , masa drugiego  $m_2$ , a odległość między środkami odcinków wynosi  $d$ .

Wprowadźmy oś współrzędnych taką, że środek masy lewego odcinka leży w punkcie  $-d/2$ , środek zaś prawego w punkcie  $d/2$ . Wówczas lewy odcinek odpowiada przedziałowi  $x_1 \in [-(d + l_1)/2, (-d + l_1)/2]$  (istotnie, średnia tego przedziału to  $-d/2$  a jego długość to  $l_1$ ), prawy zaś  $x_2 \in [(d - l_2)/2, (d + l_2)/2]$ .

Rozpatrujemy przyczynek od elementów liniowych  $dx_1$ ,  $dx_2$ , położonych w punktach, odpowiednio,  $x_1$  i  $x_2$ . Ponieważ gęstość liniowa pierwszego

odcinka wynosi  $m_1/l_1$ , drugiego  $m_2/l_2$ , jako przyczynę do siły otrzymujemy

$$G \frac{\frac{m_1}{l_1} \cdot \frac{m_2}{l_2}}{(x_2 - x_1)^2}. \quad (21a)$$

Wyrażenie to należy teraz przecałkować po obu odcinkach:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} \int_{-(d+l_1)/2}^{(-d+l_1)/2} dx_1 \int_{(d-l_2)/2}^{(d+l_2)/2} dx_2 \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \quad (21b)$$

I dalej, jeżeli nie pomyliłem się w rachunkach,

$$\begin{aligned}
 F &= G \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} \int_{-(d+l_1)/2}^{(-d+l_1)/2} dx_1 \left[ \frac{-1}{x_2 - x_1} \right]_{(d-l_2)/2}^{(d+l_2)/2} \\
 &= G \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} \int_{-(d+l_1)/2}^{(-d+l_1)/2} dx_1 \left( -\frac{1}{\frac{d+l_2}{2} - x_1} + \frac{1}{\frac{d-l_2}{2} - x_1} \right) \\
 &= G \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} \left( \left[ \ln \left| \frac{d+l_2}{2} - x_1 \right| \right]_{-(d+l_1)/2}^{(-d+l_1)/2} - \left[ \ln \left| \frac{d-l_2}{2} - x_1 \right| \right]_{-(d+l_1)/2}^{(-d+l_1)/2} \right) \\
 &= G \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} \left( \ln \left| \frac{d+l_2}{2} - \frac{-d+l_1}{2} \right| - \ln \left| \frac{d+l_2}{2} + \frac{d+l_1}{2} \right| \right. \\
 &\quad \left. - \ln \left| \frac{d-l_2}{2} - \frac{-d+l_1}{2} \right| + \ln \left| \frac{d-l_2}{2} + \frac{d+l_1}{2} \right| \right) \\
 &= G \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} \ln \left| \frac{4d^2 - (l_1 - l_2)^2}{4d^2 - (l_1 + l_2)^2} \right| \tag{21c}
 \end{aligned}$$

Komentarz: W mianowniku wyrażenia (21c) występuje odejmowanie. Czy nie prowadzi to do niedopuszczalnego dzielenia przez zero? Otóż jeśli  $d$  jest odległością środków mas odcinków, a odcinki nie przekrywają się, najmniejszą możliwą wartością  $d$  jest  $(l_1 + l_2)/2$ . Odpowiada to zeru mianownika, ale jednocześnie odpowiada to sytuacji, w której odcinki stykają się. To, formalnie, prowadzi do nieskończonej wartości siły grawitacyjnej.

## Całka $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

Funkcja  $e^{-x^2}$  nie ma funkcji pierwotnej (całki nieoznaczonej) wyrażającej się przez skończoną kombinację funkcji elementarnych. Jednak całka

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (22)$$

istnieje i można jej wartość znaleźć w sposób ścisły.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} I^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned} \quad (23)$$

W całce (23) zmieniamy zmienne na biegunowe:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \quad (24)$$

gdzie czynnik “ $r$ ” pojawił się z jacobianu. W całce (24) dokonuję zwykłej

zmiany zmiennych

$$\begin{aligned} I^2 &= \left[ \begin{array}{l} r^2 = u \\ 2r dr = du \\ 0 \rightarrow 0 \\ \infty \rightarrow \infty \end{array} \right] \\ &= \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi \left[ -e^{-u} \right]_0^{\infty} = \pi \end{aligned} \quad (25)$$

Ostatecznie

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (26)$$

Wynik (26) łatwo uogólnić. Dla  $k > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx &= \left[ \begin{array}{l} \sqrt{k} x = t \\ dx = \frac{1}{\sqrt{k}} dt \\ -\infty \rightarrow -\infty, \infty \rightarrow \infty \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{k}} \end{aligned} \quad (27)$$



## Przykład 10

Na podstawie (27) widzimy, że dla każdego  $x_0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad (28)$$

Całka (28) odgrywa bardzo ważną rolę w rachunku prawdopodobieństwa: funkcja

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (29)$$

jest gęstością *rozkładu normalnego* (lub *rozkładu Gaussa*) zmiennej losowej o wartości oczekiwanej  $x_0$  i wariancji  $\sigma^2$ . Całka (28) mówi, że gęstość ta jest poprawnie unormowana.

## Przykład 11

Obliczmy całkę

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-kx^2} dx &= -\frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx = -\frac{d}{dk} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \\ &= -\sqrt{\pi} \frac{d}{dk} k^{-1/2} = -\left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi} k^{-3/2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k^3}}\end{aligned}\tag{30}$$

Podobnie moglibyśmy obliczyć całki postaci  $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-kx^2} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

## Przykład 12

Całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-kx^2} dx = 0 \quad (31)$$

z uwagi na nieparzystość funkcji podcałkowej. Natomiast ( $k > 0$ )

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-kx^2} dx &= \left[ \begin{array}{l} kx^2 = t \\ 2kx dx = dt \\ 0 \rightarrow 0 \\ \infty \rightarrow \infty \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2k} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{2k} \end{aligned} \quad (32)$$

Podobnie moglibyśmy obliczać całki  $\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-kx^2} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gdzie przez podstawienie jak wyżej doprowadzamy do postaci dającej się scałkować przez części.

### Przykład 13

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-kx^2} dx = \frac{1}{2k^2} \int_0^{\infty} t e^{-t} dt = \frac{1}{2k^2} \quad (33)$$