Fizyka dla firm — Matematyka

29. Funkcje uwikłane i ekstrema warunkowe

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

28 kwietnia 2021

Funkcje uwikłane

Niech dane będzie wyrażenie

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

Jeżeli daje się ono “rozwiązać” w sposób **jednoznaczny** ze względu na y, to znaczy przekształcić do postaci

$$y = f(x) \tag{2}$$

przy czym równość

$$F(x, f(x)) \equiv 0 \tag{3}$$

zachodzi w sposób tożsamościowy, mówimy, że wyrażenie (1) zadaje funkcję $y = y(x)$ w sposób niejawny, a wyrażenie (2) jest jego *jawną* reprezentacją.

Przykład 1

Wyrażenia

$$2x + 3y - 1 = 0 \tag{4a}$$

$$y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x \tag{4b}$$

są niejawną i jawną reprezentacją tej samej funkcji.

Podobnie

$$\exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = 5 \tag{5a}$$

$$y = \frac{1-\ln 5}{1+\ln 5}\,x \tag{5b}$$

Rozwiązanie równania (1) ze względu na y niekiedy nie istnieje (np. $x^2 + y^2 + 1 = 0$), niekiedy rozwiązanie nie jest jednoznaczne, niekiedy zaś nie da się go przedstawić w postaci analitycznej (jawnej). W tych dwóch ostatnich przypadkach mówimy, że wyrażenie (1) zadaje funkcję $y = y(x)$ w sposób uwikłany.

Przykład 2

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{1 - x^2} \tag{6}$$

Przykład 3

$$e^{x+y} - \sin(x \cdot y) - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \text{nie ma rozwiązania w postaci jawnej} \tag{7}$$

Twierdzenie o funkcjach uwikłanych

Twierdzenie: Jeżeli istnieje punkt (x_0, y_0) taki, że $F(x_0, y_0) = 0$ i funkcja $F(x, y)$ jest w otoczeniu tego punktu ciągła i ma w otoczeniu tego punktu ciągłą pochodną $\frac{\partial F}{\partial y}$, przy czym $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} \neq 0$, to w otoczeniu punktu (x_0, y_0) istnieje funkcja $y = f(x)$ taka, że $F(x, f(x)) \equiv 0$ oraz $y_0 = f(x_0)$.
Ponadto jeśli funkcja $F(x, y)$ ma w otoczeniu punktu (x_0, y_0) ciągłą pochodną $\frac{\partial F}{\partial x}$, to

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{8}$$

Przykład 4

Rozważmy wyrażenie

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{9a}$$

Punkt $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ spełnia równanie (9a). Ponadto pochodna cząstkowa $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$ przybiera w tym punkcie wartość $-\sqrt{3} \neq 0$, a zatem wyrażenie (9a) można w otoczeniu tego punktu rozwikłać ze względu na y:

$$y = -\sqrt{1 - x^2} \tag{9b}$$

Wybór punktu leżącego na konkretnym półokręgu ustalił znak w wyrażeniu (6).

Przykład 5

Nadal rozważamy wyrażenie (9a), ale tym razem bierzemy punkt $(1, 0)$. Punkt ten leży na okręgu, ale w tym punkcie pochodna cząstkowa $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ i wyrażenia (9a) nie można w otoczeniu tego punktu rozwikłać ze względu na y.

Przykład 6

Obliczmy pochodną $\frac{dy}{dx}$, jeżeli $y = y(x)$ jest dana w postaci uwikłanej za pomocą wyrażenia

$$F(x,y) = x\,e^y - y + 1 = 0 \tag{10a}$$

Przede wszystkim

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x\,e^y - 1 = y - 2 \tag{10b}$$

gdyż z równania (10a) wynika, że $x\,e^y = y - 1$. Stąd wniosek, że wyrażenie (10a) daje się rozwikłać ze względu na y poza prostą $y = 2$. Dalej,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^y \tag{10c}$$

zatem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y}{y-2} = \frac{e^y}{2-y} \tag{10d}$$

Ten sam wynik uzyskalibyśmy różniczkując (10a) wyraz po wyrazie:

$$\frac{d}{dx}\left(x\,e^y - y + 1\right) = \frac{d}{dx}0 \tag{10e}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\,e^y\right) - \frac{dy}{dx} = 0 \tag{10f}$$

$$e^y + x\,e^y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0 \tag{10g}$$

$$-\frac{dy}{dx}\left(1 - x\,e^y\right) + e^y = 0 \tag{10h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{1 - x\,e^y} = \frac{e^y}{1-(y-1)} = \frac{e^y}{2-y} \tag{10i}$$

Uogólnienie na więcej zmiennych

Rozważmy funkcję $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ i niech

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \tag{11}$$

Jeżeli istnieje punkt $(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{N_0}$ spełniający rónanie (11), przy czym funkcja F jest w otoczeniu tego punktu ciągła oraz w tym punkcie $\frac{\partial F}{\partial x_N} \neq 0$, wyrażenie (11) daje się rozwikłać ze względu na x_n w otoczeniu tego punktu, to znaczy istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ taka, że

$$x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) \tag{12}$$

oraz

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, f(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})) \equiv 0 \tag{13}$$

Ponadto jeśli pozostałe pochodne cząstkowe istnieją i są ciągłe,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_N}} \tag{14}$$

.

Przykład 7

Niech

$$F(x,y,z) = xy + xz + yz - 3 = 0 \tag{15a}$$

Punkt $(1,1,1)$ spełnia równanie (15a). W tym punkcie $\frac{\partial F}{\partial z} = 2 \neq 0$, a więc równanie (15a) daje się rozwikłać ze względu na z. Różniczkując wyrażenie (15a), odpowiednio, po x i po y otrzymujemy

$$y + z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y} \tag{15b}$$

$$x + x\frac{\partial z}{\partial y} + z + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y} \tag{15c}$$

co jest zgodne z (14).

Ekstrema funkcji uwikłanej

Niech będzie spełnione rónanie (1) oraz założenia twierdzenia o funkcjach uwikłanych. Wówczas funkcję $y = y(x)$ daje się rozwikłać i zachodzi równanie (8). Aby funkcja $y = y(x)$ mogło mieć ekstremum, muszą być spełnione oba warunki

$$F(x, y) = 0 \tag{16a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{16b}$$

Aby zbadać, czy rozwiązania układu równań (16) w istocie są ekstremami, a jeśli tak, to czy minimami, czy maksimami, musimy obliczyć drugą pochodną, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Formalnie dla funkcji dwóch zmiennych, x, y, przy czym $y = y(x)$, operator różniczkowania

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \tag{17}$$

Różniczkując wyrażenie (1), otrzymujemy

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \tag{18}$$

równoważne warunkowi (8). Różniczkując jeszcze raz

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{19a}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{19b}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{19c}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial y}\right]\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{19d}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}\cdot\frac{dy}{dx}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{19e}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{19f}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości pochodnych mieszanych. Zatem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) \tag{20}$$

Jeżeli $\frac{dy}{dx} = 0$, wyrażenie to upraszcza się do

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{\frac{dy}{dx}=0} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{21}$$

Przykład 8

Zbadajmy ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ danej w sposób niejawny za pomocą równania

$$F(x,y) = y^4 - 8xy - 4y + 8x^2 = 0 \tag{22a}$$

Musimy rozwiązać układ równań składający się z (22a) oraz równania

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -8y + 16x = -8(y - 2x) = 0 \tag{22b}$$

skąd $x = \frac{1}{2}y$. Podstawiając do (22a) otrzymujemy

$$y^4 - 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot y^2 - 4y + 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 y^2 = 0 \tag{22c}$$

$$y^4 - 4y^2 - 4y + 2y^2 = 0 \tag{22d}$$

$$y^4 - 2y^2 - 4y = 0 \tag{22e}$$

$$y(y^3 - 2y - 4) = 0 \tag{22f}$$

Rzeczywistymi pierwiastkami tego równania są $y = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$ oraz $y = 2 \ \Rightarrow\ x = 1$.

Musimy jeszcze obliczyć

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 16 \tag{22g}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3 - 8x - 4 = 4(y^3 - 2x - 1) \tag{22h}$$

W punkcie $(0,0)$ $\partial F/\partial y = -4 \neq 0$, $\partial^2 F/\partial x^2 = 16$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{16}{-4} = 4 > 0$ i funkcja uwikłana ma tam minimum.

W punkcie $(1,2)$ $\partial F/\partial y = 4(8-2-1) = 20 \neq 0$, $\partial^2 F/\partial x^2 = 16$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{16}{20} = -\frac{4}{5} < 0$ i funkcja uwikłana ma tam maksimum.

Przekształcenia płaszczyzny w siebie

Przypuśćmy, że dane jest przekształcenie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$x = f(u,v) \tag{23a}$$

$$y = g(u,v) \tag{23b}$$

przy czym funkcje f, g są określone i ciągłe w pewnym obszarze W. Jeśli punkt $P(u,v) \in W$, to punkt $Q(f(u,v), g(u,v))$ nazywam obrazem punktu P w tym przekształceniu.

Przykład 9

Niech

$$x = u^2\,, \quad y = v^2 \tag{24a}$$

Obrazem koła

$$u^2 + v^2 \leqslant 4 \tag{24b}$$

w przekształceniu (24a) jest trójkąt

$$0 \leqslant x + y \leqslant 4\,,\ x \geqslant 0\,,\ y \geqslant 0\,. \tag{24c}$$

Jakobian

Weźmy przekształcenie (23) i załóżmy, że funkcje f, g są (co najmniej) klasy C_1. Wyznacznik

$$\frac{D(f,g)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{25}$$

nazywam jakobianem odwzorowania (23).

Homeomorfizm i dyfeomorfizm

Twierdzenie: Jeżeli w pewnym punkcie $(u_0, v_0) \in W$ jakobian (25) jest różny od zera

$$\left. \frac{D(f,g)}{D(u,v)} \right|_{(u_0,v_0)} \neq 0 \tag{26}$$

to istnieje otoczenie U punktu $Q_0(x_0, y_0) = Q(f(u_0, v_0), g(u_0, v_0))$, w którym odwzorowanie (23) jest odwracalne, to znaczy istnieją funkcje jednoznaczne h, k takie, że

$$u = h(x, y)\,, \quad v = k(x, y)\,. \tag{27}$$

Jeżeli odwzorowanie (23) jest odwracalne na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ i odwzorowanie odwrotne jest ciągłe, odwzorowanie to nazywam homeomorfizmem. Jeżeli ponadto odwzorowanie odwrotne jest co najmniej klasy C_1, odwzorowanie (23) nazywam dyfeomorfizmem.

Uogólnienie

Powyższe rozważania można uogólnić i zapisać w bardziej zwartej formie. Niech $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ będzie funkcją klasy co najmniej C_1. Dla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots \\ f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N \tag{28}$$

i funkcje $f_1, f_2, \dots, f_N$ są klasy co najmniej C_1 jako funkcje N zmiennych rzeczywistych ($\forall i = 1, \dots, N : f_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$).

Macierz pochodnych czątkowych

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i,j=1,\dots,N} \tag{29}$$

nazywam macierzą Jacobiego funkcji (28). Wówczas jakobian jest wyznacznikiem macierzy (29), $J = \det \mathbf{J}$.

Pojęcia homeomorfizmu i dyfeomorfizmu uogólniają się odpowiednio: Jeśli funkcja $\mathbf{f}$ (28) jest odwracalna na całej $\mathbb{R}^N$, a jej odwrotność jest ciągła, nazywamy ją homeomorfizmem. Jeśli funkcja (28) jest (co najmniej) klasy C_1, jest owracalna, a jej odwrotność też jest klasy C_1, nazywamy ją dyfeomorfizmem.

Przykład 10

Współrzędne biegunowe i ich jakobian:

$$\begin{cases} x & = r \cos\varphi \\ y & = r \sin\varphi \end{cases} \tag{30a}$$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \tag{30b}$$

Przykład 11

Współrzędne cylindryczne i ich jakobian:

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{cases} \tag{31a}$$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \tag{31b}$$

Przykład 12

Współrzędne sferyczne i ich jakobian:

$$
\begin{cases}
x &= r\cos\theta\cos\phi \\
y &= r\cos\theta\sin\phi \\
z &= r\sin\theta
\end{cases}
\tag{32a}
$$

$$
\begin{aligned}
J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\cos\phi & -r\cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0 - r^2\sin^2\theta\cos\theta\cos^2\phi - r^2\cos^3\theta\sin^2\phi \\
&\quad - r^2\sin^2\theta\cos\theta\sin^2\phi - r^2\cos^3\theta\cos^2\phi - 0 \\
&= -r^2\cos\theta \qquad (32b)
\end{aligned}
$$

Ekstrema warunkowe

Niech funkcje $f(x, y), g(x, y)$ będą określone i ciągłe w pewnym obszarze D. Mówimy, że funkcja $f(x, y)$ osiąga w puncie (x_0, y_0) ekstremum warunkowe przy warunku $g(x, y) = 0$, jeżeli $g(x_0, y_0) = 0$ oraz istnieje takie otoczenie punktu $(x_0, y_0$, że dla każdego punktu (x, y) należącego do tego otoczenia i spełniającego warunek $g(x, y) = 0$ zachodzi $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ (maksimum) lub $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$ (minimum).

Twierdzenie: Jeżeli funkcje f, g są klasy (co najmniej) C_1, warunkiem koniecznym istnienia ekstremum w punkcie (x_0, y_0) jest aby jakobian

$$\left. \frac{D(f, g)}{D(x, y)} \right|_{x_0, y_0} = 0 \tag{33}$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że punkty, w których mogą istnieć ekstrema warunkowe, znajdujemy rozwiązując układ równań

$$g(x,y) = 0 \tag{34a}$$

$$\frac{D(f,g)}{D(x,y)} = 0 \tag{34b}$$

Metoda mnożników Lagrange'a

Wprowadzam funkcję pomocniczą

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) \tag{35}$$

znajduję warunki konieczne na istnienie ekstremum funkcji $F(x,y)$, czyli zerowanie się gradientu ∇F, a następnie eliminuję czynnik nieoznaczony λ. Widać, że jest to równoważne warunkom (34).

Uogólnienie na N wymiarów jest oczywiste: Jeżeli szukam ekstremum funkcji $f(x_1,\dots,x_N)$ przy warunku $g(x_1,\dots,x_N) = 0$, wprowadzam funkcję

$$F(x_1,\dots,x_N) = f(x_1,\dots,x_N) + \lambda g(x_1,\dots,x_N) \tag{36}$$

i eliminuję λ z układu równań

$$\nabla F(x_1,\dots,x_N) = 0 \tag{37a}$$

$$g(x_1,\dots,x_N) = 0 \tag{37b}$$

Przykład 13

Znajdźmy ekstrema funkcji $f(x,y) = xy$ przy warunku $x^2 + y^2 = 1$.

W tym celu tworzę funkcję

$$F(x,y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2) \tag{38a}$$

a następnie rozwiązuję układ równań

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda x & = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + 2\lambda y & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 1 \end{cases} \tag{38b}$$

Z pierwszego z tych równań otrzymuję $\lambda = -\frac{y}{2x}$. Po podstawieniu do drugiego równania daje $x^2 - y^2 = 0$. Ostatecznie otzrymuję układ dwu równań z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 1 \end{cases} \tag{38c}$$

którego rozwiązaniami są *cztery* punkty $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Łatwo sprawdzić, że $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$, co odpowiada maksimum, natomiast $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$, co odpowiada minimum.

Krzywe na płaszczyźnie

Wykres funkcji ciągłej jednej zmiennej rzeczywistej jest krzywą na płaszczyźnie, czyli zbiorem punktów $\{(x, f(x)) : x \in D\}$, gdzie D jest dziedziną funkcji $f(x)$ i dodatkowo jest przedziałem właściwym lub zbiorem jednostronnie lub obustronnie nieskończonym. Warunki, że dziedzina nie jest "pokawałkowana", a funkcja jest ciągła, stanowią, że jej wykres jest "krzywą" w potocznym rozumieniu tego słowa.

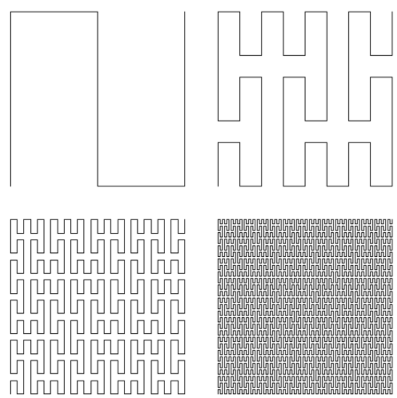
Funkcja nie musi być przy tym dana jawnym wzorem — może być funkcją uwikłaną.

Są jednak krzywe, które *nie* są wykresami jakiejść funkcji z uwagi na brak jednoznaczności. Okazuje się, że ścisłe zdefiniowanie pojęcia krzywej jest trudniejsze, niż to się może wydawać. My przyjmujemy następującą definicję:

Krzywą nazywam dowolne ciągłe odwzorowanie $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, gdzie I jest pewnym przedziałem liczb rzeczywistych: właściwym ($I = [a, b]$, najczęściej przyjmuje się $I = [0, 1]$) bądź jednostronnie lub obustronnie nieskończonym. Innymi słowy, krzywa to zbiór punktów $\{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$, a funkcje $\varphi(t), \psi(t)$ są ciągłe.

Krzywa Peano

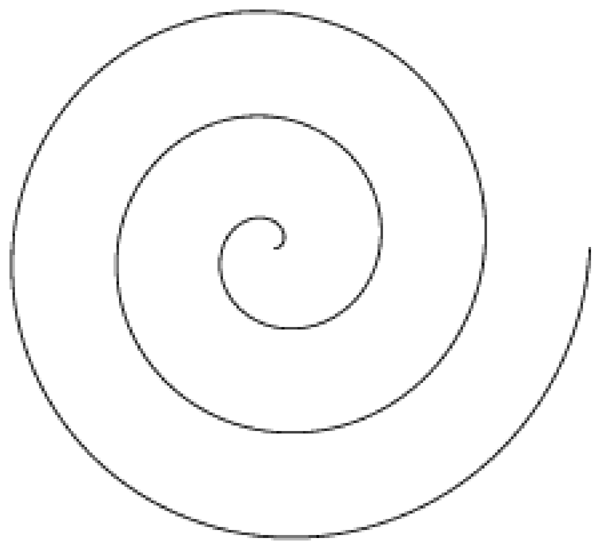
Powyższa definicja uważana jest za wadliwą, gdyż pozwala uznać za “krzywe” obiekty w pewnym sensie “patologiczne”, na przykład **ciągłe** odwzorowanie odcinka $[0,1]$ w kwadrat $[0,1]\times[0,1]$. Krzywą taką nazywa się krzywą Peano (właściwie powinno się mówić “krzywa Peana”). Nam jednak definicja podana na stronie 35 wystarcza.



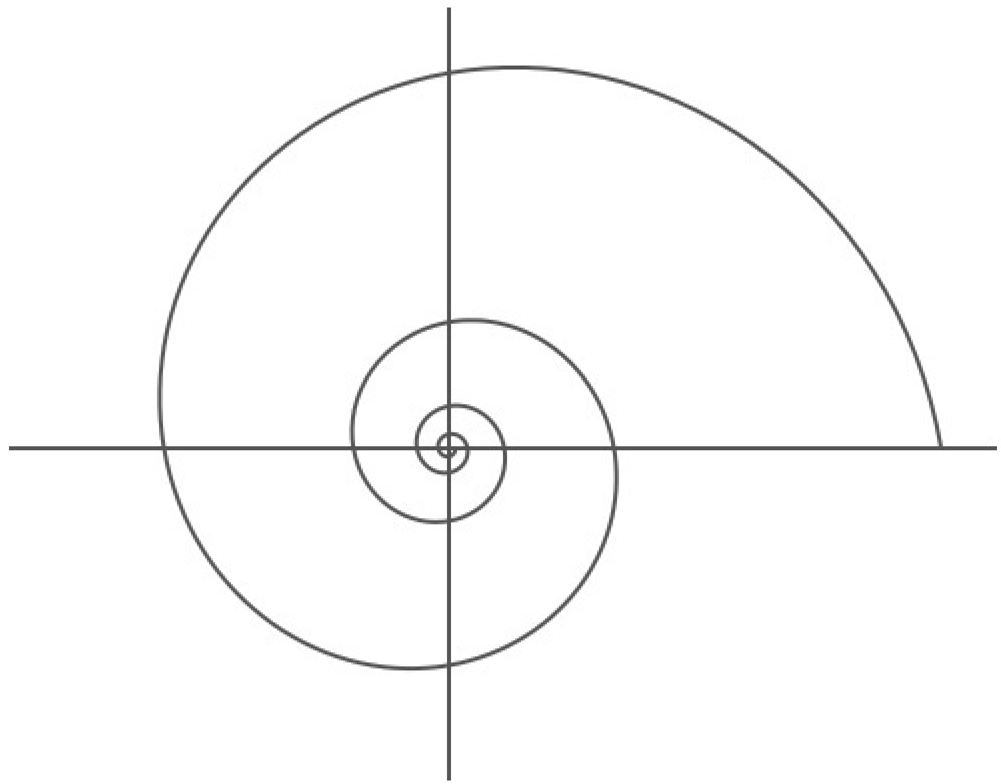
Cztery etapy konstrukcji krzywej Peano.
Grafika autorstwa Autorstwa Gunther-commonswiki — Praca własna, CC BY-SA 3.0,
`https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=206015`

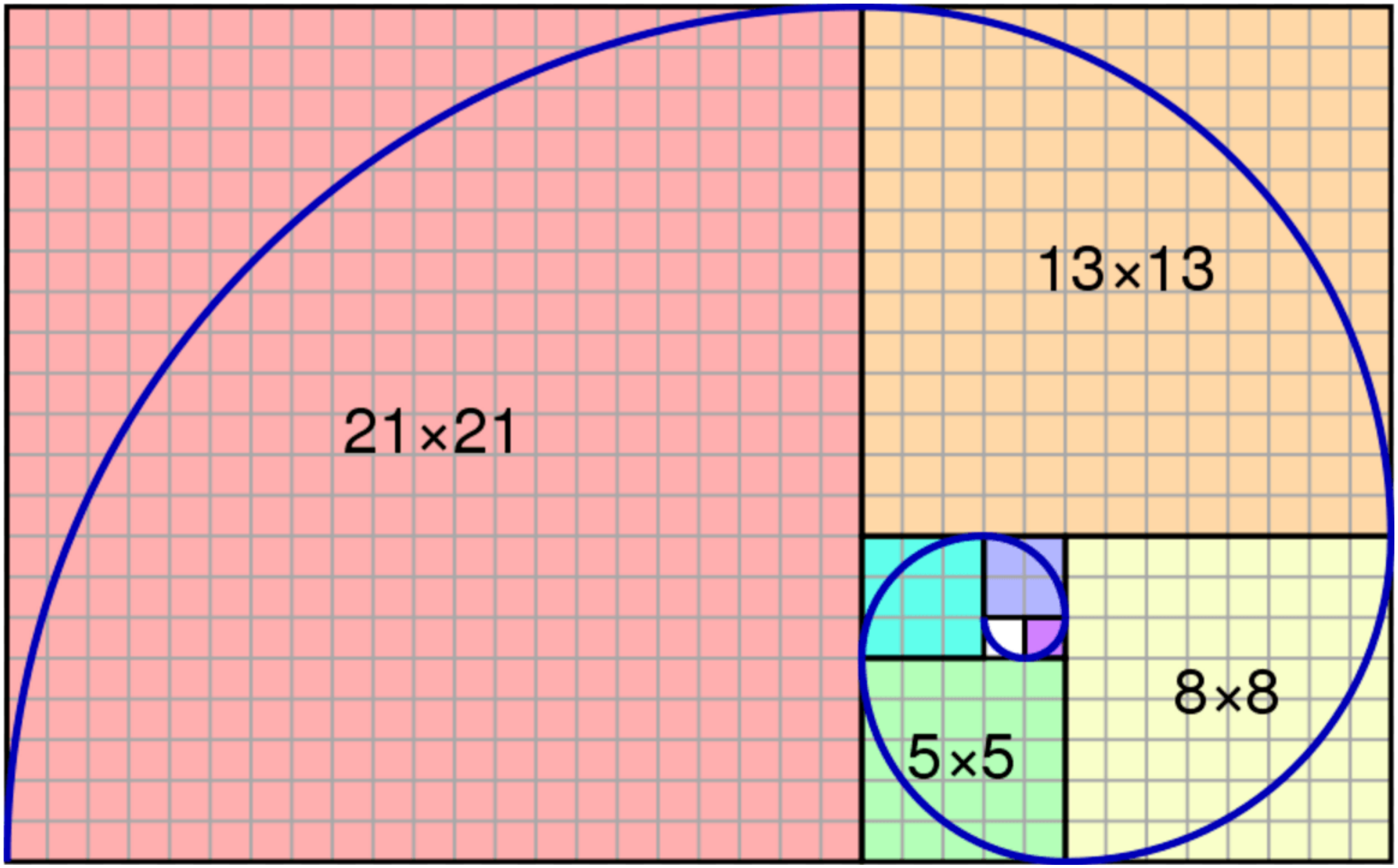
Przykład 14

Spirala Archimedesa $r = a \cdot \varphi\,,\ a = \mathrm{const} > 0$.

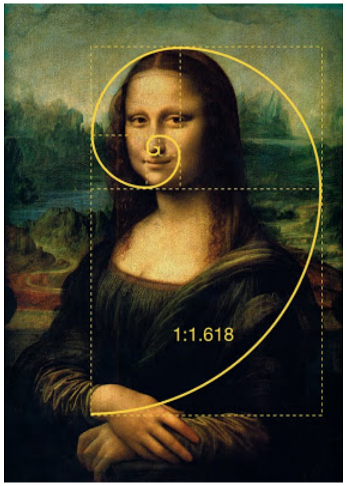


Spirala logarytmiczna $r = a \cdot e^{k\varphi}$, $a = \mathsf{const} > 0$, $k \neq 0$.





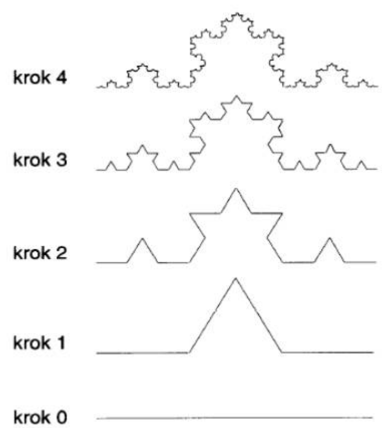
Spirala logarytmiczna $k = (\sqrt{5} - 1)/2$


1:1.618

Krzywa gładka

Krzywą $(\varphi(t), \psi(t))$ nazywam gładką, jeżeli funkcje φ, ψ są klasy C_1.

Krzywe, które w żadnym punkcie nie są różniczkowalne, nazywam fraktalami.



Początkowe etapy konstrukcji krzywej Kocha

Styczna i normalna

Styczna do *wykresu* funkcji w punkcie (x_0, y_0), przy czym $y_0 = f(x_0)$, dana jest równaniem

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \tag{39a}$$

a wobec tego normalna dana jest przez

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0 \tag{39b}$$

gdzie $f'(x_0)$ jest pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0.

Wyrażenia (39) można natychmiast uogólnić na funkcje dane w sposób uwikłany, przy czym do obliczenia $f'(x_0)$ należy użyć wyrażenia (8).

W przypadku krzywej danej parametrycznie

$$\begin{cases} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{cases} \tag{40}$$

najpierw obliczamy różniczki

$$\begin{cases} dx &= \varphi'(t)\big|_{t_0}\, dt \\ dy &= \psi'(t)\big|_{t_0}\, dt \end{cases} \tag{41a}$$

po czym obliczamy

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{\varphi'(t)\big|_{t_0}}{\psi'(t)\big|_{t_0}} \tag{41b}$$

przy czym t_0 jest punktem, dla którego $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$, w którym wyznaczamy styczną i normalną.

W punktach, w którcyh pochodna dy/dx nie istnieje, nie można wyznaczyć ani prostej stycznej, ani prostej normalnej do krzywej.

Wektor styczny i normalny

Wyrażenia (39) dają równania na prostą styczną i normalną do krzywej. Niekiedy potrzebne są unormowane *wektory*, odpowiednio, styczne i normalne do krzywej.

Korzystając ze wzorów na wektor kierunkowy prostej i z (39), widzimy, że wektor styczny do krzywej dany jest wyrażeniem

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \cdot \left[1, f'(x)\right] \tag{42}$$

natomiast wektor normalny

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(f'(x))^2}}} \cdot \left[1, -\frac{1}{f'(x)}\right] \tag{43}$$

Pochodną wyliczamy w sposób adekwatny do sposobu zadania krzywej, w punkcie leżącym na krzywej.

Przykład 15

Wyznacz styczną i normalną do spirali Archimedesa:

$$r = a \cdot \varphi \tag{44a}$$

Przechodząc do współrzędnych kartezjańskich mamy

$$\begin{cases} x &= a\varphi \cos\varphi \\ y &= a\varphi \sin\varphi \end{cases} \tag{44b}$$

Mamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a\varphi\cos\varphi)'}{(a\varphi\sin\varphi)'} = \frac{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi} = \left.\frac{1-\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\varphi + \mathrm{tg}\,\varphi}\right|_{\varphi_0} \tag{44c}$$

gdzie φ_0 jest kątem opisującym pewien punkt na spirali. W takim punkcie $y_0/x_0 = \operatorname{tg}\varphi_0$. Zatem równanie stycznej ma postać

$$y = \frac{x_0 - y_0 \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0}}{x_0 \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0} + y_0}(x - x_0) + y_0 \tag{44d}$$

i analogicznie dla równania normalnej.

Pochodna wektora o ustalonej długości

Przypuśćmy, że pewien wektor $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \ldots, s_n] \in \mathbb{R}^N$ ma ustaloną długość:

$$\|\mathbf{s}\|^2 = \sum_{i=1}^{N} s_i^2 = s^2 = \text{const} \tag{45}$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $s^2 = 1$.

Wektor $\mathbf{s}$ może się zmieniać w zależności od pewnej zmiennej t, ale tak, aby warunek (45) był zachowany. Oznacza to, że może się zmieniać kierunek wektora, ale nie jego długość. Zróżniczkujmy wyrażenie (45):

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} s_i^2\right) &= \frac{d}{dt}\mathsf{const} && \text{(46a)}\\
\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} s_i^2\right) &= 0 && \text{(46b)}\\
\sum_{i=1}^{N} 2s_i\frac{ds_i}{dt} &= 0 && \text{(46c)}\\
\sum_{i=1}^{N} s_i\,\dot{s}_i &= 0 && \text{(46d)}\\
\dot{\mathbf{s}} \circ \mathbf{s} = 0 & && \text{(46e)}
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z twierdzenia o funkcjach uwikłanych oraz przyjęliśmy oznaczenie $\dot{g} \equiv \dfrac{dg}{dt}$, jeśli zmienna t jest interpretowana jako czas.

Warunek (46e) oznacza, że pochodna wektora o ustalonej długości jest prostopadła do tego wektora.

Przykład: Ruch jednostajny po okręgu

Ruch jednostajny po okręgu najłatwiej przedstawić we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{cases} r & = \text{const} \\ \varphi & = \omega t \end{cases} \tag{47}$$

We współrzędnych kartezjańskich mamy wobec tego opis parametryczny:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{bmatrix} \tag{48}$$

Prędkość w ruchu jednostajnym po okręgu wyraża się wzorem

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -r\omega\sin\omega t \\ r\omega\cos\omega t \end{bmatrix} \tag{49}$$

Zauważmy, że $v = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{r^2\omega^2 \sin^2 \omega t + r^2\omega^2 \cos^2 \omega t} = r\omega =$ const. Nie dziwi zatem, że

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \equiv \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \cos \omega t \\ -r\omega^2 \sin \omega t \end{bmatrix} \tag{50}$$

jest wektorem prostopadłym do wektora $\mathbf{v}$: $\mathbf{a} \circ \mathbf{v} = 0$. Jednocześnie $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{x}$ oraz $\mathbf{x} \circ \mathbf{a} = -r^2\omega^2 < 0$, czyli wektor $\mathbf{a}$ jest antyrównoległy do wektora $\mathbf{x}$: Jeśli wektor $\mathbf{x}$ jest wektorem wodzącym punktu na okręgu, a więc wskazuje *od* środka układu do punktu na okręgu, wektor $\mathbf{a}$ wskazuje od punktu na okręgu *do* środka układu współrzędnych. Wektor $\mathbf{a}$ (50) nazywamy przyspieszeniem dośrodkowym.

Wartość przyspieszenia dośrodkowego wynosi $a = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{r^2\omega^4 \cos^2 \omega t + r^2\omega^4 \sin^2 \omega t} = r\omega^2 = v^2/r$.