# Fizyka dla firm — Matematyka

## 27. Wielomiany ortogonalne

P. F. Góra
http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

31 marca 2021

## Całkowalność wielomianów

Rozpatrzmy przestrzeń $L_2([-1,1],1)$, czyli zbiór wszystkich funkcji o tej własności, że

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx < +\infty \tag{1}$$

1. Wielomian dowolnego stopnia należy do tej przestrzeni. Istotnie, wielomiany są funkcjami ciągłymi, kwadraty ich modułów są funkcjami ciągłymi, a wszystkie funkcje ciągłe na przedziale domkniętym są na tym przedziale całkowalne.

2. Wielomiany różnych stopni są liniowo niezależne. Istotnie,

$$\sim\exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{C}\,,\ \alpha\neq 0\vee\beta\neq 0 : \alpha x^n+\beta x^m\equiv 0 \text{ dla } n\neq m \tag{2}$$

3. Wymiar przestrzeni liniowej to liczba niezależnych liniowo wektorów, jakie się w niej znajdują.

Wypływa stąd wniosek, że przestrzeń $L_2([-1,1],1)$ jest nieskończenie wymiarowa.

Ponieważ można łatwo pokazać, że dla dowolnego wielomianu $Q(x)$

$$\int\limits_0^\infty |Q(x)|^2 \, e^{-x} \, dx < +\infty \tag{3a}$$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty |Q(x)|^2 \, e^{-x^2} \, dx \tag{3b}$$

powtarzając powyższe rozumowanie udowadniamy, że przestrzenie $L_2\left([0,\infty),e^{-x}\right)$, $L_2\left((-\infty,\infty),e^{-x^2}\right)$ są nieskończenie wymiarowe.

## Wielomiany Legendre'a

Skonstruujmy bazę w przestrzeni $L_2([-1,1],1)$. Bazą z pewnością jest baza jednomianów $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n \dots\}$, gdyż każdą funkcję całkowalną z kwadratem da się rozwinąć w szereg Taylora (co najwyżej poza skończoną ilością punktów). Baza jednomianów jest jednak niewygodna. Skonstruujmy wielomiany ortogonalne.

Wielomianami Legendre'a nazywam wielomiany $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, gdzie $P_n$ jest wielomianem stopnia $n$, spełniające

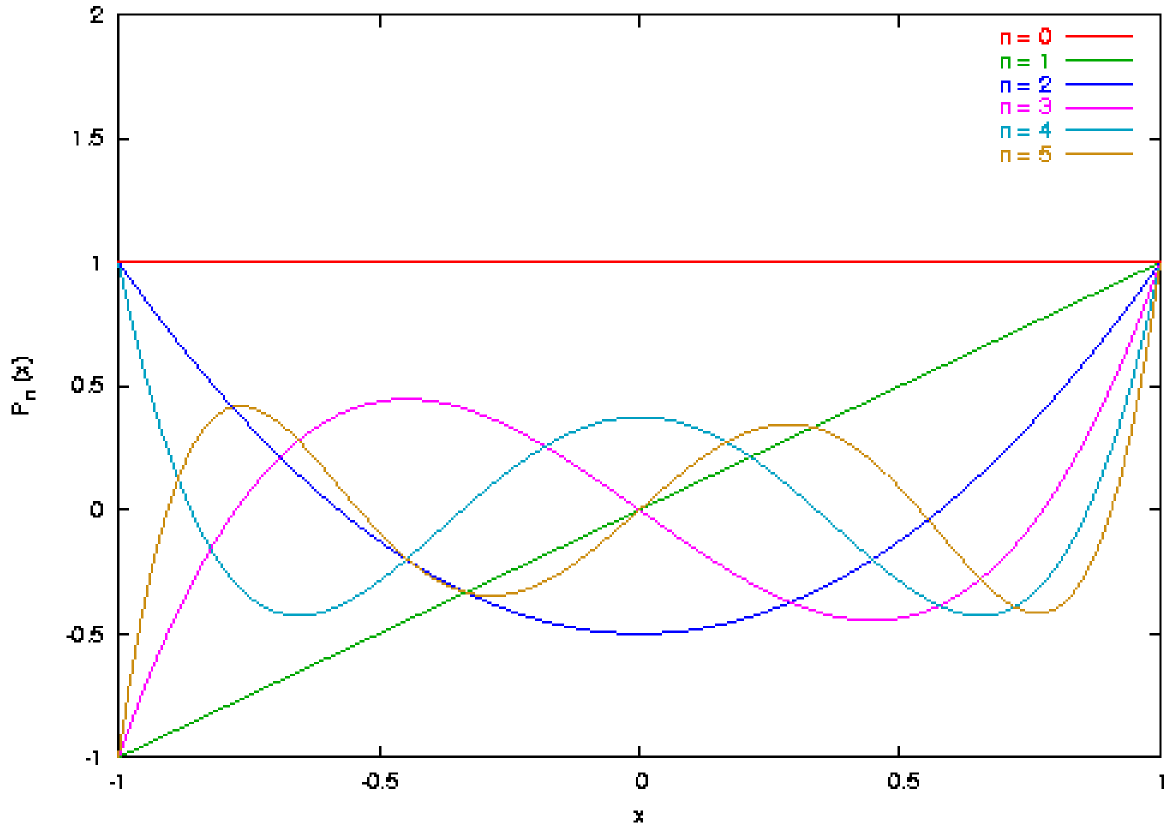
$$\langle P_n | P_m \rangle = \int\limits_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \tag{4}$$

Innymi słowy, wielomiany Legendre'a mają tę własność, że iloczyn skalarny wielomianów różnego stopnia znika. W związku z własnościami iloczynu skalarnego, wielomiany takie nazywamy *ortogonalnymi*. Współczynnik po prawej dobrano w ten sposób, aby inne wzory wyglądały "ładnie".

Idea konstrukcji wielomianów spełniających (4) jest całkiem prosta: Przyjmijmy, że $P_0 = 1$. Wówczas z warunku ortogonalności $P_1 = x$; zauważmy, że $\int_{-1}^{1} x^2\, dx = 2/3 = 2/(2 \cdot 1 + 1)$. $P_2$ musi być ortogonalny tak do $P_0 = 1$, jak i do $P_1 = x$, stąd $P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$. I tak dalej.

Pierwsze sześć wielomianów Legendre'a ma postać

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 && \text{(5a)}\\
P_1(x) &= x && \text{(5b)}\\
P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} && \text{(5c)}\\
P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x && \text{(5d)}\\
P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8} && \text{(5e)}\\
P_5(x) &= \frac{63}{8}x^5 - \frac{70}{8}x^3 + \frac{15}{8}x && \text{(5f)}
\end{aligned}
$$


n = 0
n = 1
n = 2
n = 3
n = 4
n = 5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
x
P_n (x)

## Własności wielomianów Legendre'a

1. Wielomiany Legendre'a stopnia parzystego zawierają wyłącznie parzyste potęgi $x$ i są funkcjami parzystymi: $P_{2n}(-x) = P_{2n}(x)$. Wielomiany Legendre'a stopnia nieparzystego zawierają wyłącznie nieparzyste potęgi $x$ i są funkcjami nieparzystymi: $P_{2n+1}(-x) = -P_{2n+1}(x)$.
2. Wszystkie miejsca zerowe wielomianów Legendre'a są rzeczywiste, jednokrotne i leżą w przedziale $(-1, 1)$.
3. Z ortogonalności wielomianów Legendre'a do wielomianu $P_0$ wynika, że

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = 0\,,\ n \geqslant 1 \tag{6}$$

## Rozkład w bazie wielomianów Legendre'a

Z tego, cośmy dotąd powiedzieli, wynika, że funkcje $\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, czyli unormowane wielomiany Legendre'a, stanowią bazę ortonormalną w przestrzeni $L_2([-1,1],1)$. Oznacza to, że każdą funkcję należącą do tej przestrzeni można przedstawić jako

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \tag{7a}$$

gdzie

$$\alpha_n = \langle P_n | f \rangle = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)\, f(x)\, dx \tag{7b}$$

Niech $\{\alpha_n, \beta_n\}$ będą współczynnikami rozkładu (7) funkcji, odpowiednio, $f(x), g(x)$. Obliczmy iloczyn skalarny

$$
\begin{aligned}
\langle f|g\rangle &= \int\limits_{-1}^{1} f^*(x)\, g(x)\, dx \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \alpha_n^* \beta_m \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\sqrt{\frac{2m+1}{2}} \int\limits_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_n^* \beta_m \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\sqrt{\frac{2m+1}{2}} \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^* \beta_n
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Jest to (nieskończona) suma iloczynów po współrzędnych ☺

## Rozkład jedności

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(y) = \delta(x-y) \tag{9}$$

gdzie $\delta(x-y)$ jest deltą Diraca, a $x, y \in [-1, 1]$. Jest to odpowiednik rozkładu jedności znanego dla macierzy symetrycznych rzeczywistych i hermitowskich w przestrzeniach skończeniewymiarowych.

## Wzór rekurencyjny

Można udowodnić, że dla $n \geqslant 1$

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x) \tag{10}$$

Wielomiany Legendre'a można zdefiniować za pomocą następującej formuły Rodriguesa:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) \tag{11a}$$

Wielomiany Legendre'a można zdefiniować także poprzez funkcję tworzącą

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n\,,\ x \in [-1,1] \tag{11b}$$

lub jako rozwiązania równania Legendre'a nieosobliwe w zerze:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right] + n(n+1)P_n(x) = 0\,,\ n \in \mathbb{N} \tag{11c}$$

Równoważność definicji (4), (11a), (11b) i (11c) *dalece* wykracza poza ramy niniejszego wykładu.

## Znaczenie wielomianów Legendre'a

Poza swoim znaczeniem czysto formalnym, wielomiany Legendre'a pojawiają się wszędzie tam, gdzie bada się obiekty o symetrii obrotowej. W szczególności pojawiają się one w funkcjach własnych kwantowego momentu pędu. Wielomiany te są także użyteczne w innych zagadnieniach nauki i techniki, na przykład w optymalizacji pewnych sieci neuronowych.

## Wielomiany Czebyszewa

Zauważmy że

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \left| \begin{array}{l} x = \cos t \\ dx = -\sin t\, dt \\ -1 \to \pi \\ \;\;1 \to 0 \end{array} \right| \\
&= -\int\limits_{\pi}^{0} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\, dt = \int\limits_{0}^{\pi} dt \\
&= \pi < +\infty
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Powyższa całka istnieje i jest skończona, mimo że funkcja podcałkowa jest rozbieżna na krańcach przedziału całkowania. Jednocześnie $(1 - x^2)^{-1/2} > 0$ dla wszystkich $x \in (-1, 1)$. Może to więc być funkcja wagowa. Rozważamy zatem przestrzeń

$$L_2([-1,1],(1-x^2)^{-1/2}) = \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{C} : \int\limits_{-1}^{1} \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx < +\infty \right\} \tag{13}$$

Można pokazać, że jest to nieskończenie wymiarowa przestrzeń liniowa.

## Wielomiany $T_k$

Zdefiniujmy funkcje, które (nieco na wyrost) nazwiemy wielomianami Czebyszewa

$$T_k(x) = \cos\left(k \cdot \arccos(x)\right), \; x \in [-1,1], \; k \in \mathbb{N} \tag{14}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_k(x)T_l(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= -\int\limits_{\pi}^{0} \frac{T_k(\cos t)T_l(\cos t)}{\sqrt{1-\cos^2 t}} \sin t\,dt \\ &= \int\limits_{0}^{\pi} \cos(kt)\,\cos(lt)\,dt = \frac{\pi}{2}\delta_{kl}\end{aligned} \tag{15}$$

$\left(\int_{-1}^{1} (T_0(x))^2 (1-x^2)^{-1/2}\,dx = \pi\,.\right)$

Jeżeli w przestrzeni (13) wprowadzimy iloczyn skalarny

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f^*(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{16}$$

powyższy wynik oznacza, że funkcje $\{T_k\}$ stanowią układ ortogonalny względem tego iloczynu skalarnego, a po unormowaniu tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni (13).

## Najniższe wielomiany Czebyszewa

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= \cos(0 \cdot \arccos(x)) = \cos 0 = 1 && \text{(17a)}\\
T_1(x) &= \cos(\arccos(x)) = x && \text{(17b)}\\
T_2(x) &= \cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 &&\\
&= 2x^2 - 1 && \text{(17c)}\\
T_3(x) &= \cos(3\arccos(x)) = \cos(2\arccos(x) + \arccos(x)) &&\\
&= \cos(2\arccos(x))\cos(\arccos(x)) &&\\
&- \sin(2\arccos(x))\sin(\arccos(x)) &&\\
&= (2\cos^2(\arccos(x)) - 1)\cos(\arccos(x)) &&\\
&- 2\sin(\arccos(x))\cos(\arccos(x))\sin(\arccos(x)) &&\\
&= (2x^2 - 1)x - 2(1 - x^2)x = 4x^3 - 3x && \text{(17d)}
\end{aligned}
$$

## Wzór rekurencyjny

Wielomiany Czebyszewa spełniają następującą relację rekurencyjną dla $k \geqslant 1$

$$T_{k+1}(x) = 2x\,T_k(x) - T_{k-1}(x) \tag{18}$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznych, pokażemy, że wzór (18) sam jest tożsamością.

*Dowód.* Dla uproszczenia notacji, niech $u = \arccos x$.
Wówczas $\cos(lu) = T_l(x)$.

Mamy teraz

$$
\begin{aligned}
T_{k+1}(x) &= \cos((k+1)u) = \cos(ku+u) \\
&= \cos(ku)\cos u - \sin(ku)\sin u = xT_k(x) - \sin(ku)\sin u \\
&= xT_k(x) - (\sin(k-1)u\cos u + \cos(k-1)u\sin u)\sin u \\
&= xT_k(x) - x\sin(k-1)u\sin u - T_{k-1}(x)\sin^2 u \\
&= xT_k(x) - x\,(\cos(k-1)u\cos u - \cos(ku)) \\
&\quad - T_{k-1}(x)(1-x^2) \\
&= xT_k(x) - x^2T_{k-1}(x) + xT_k(x) - T_{k-1}(x) + x^2T_{k-1} \\
&= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \qquad (19)
\end{aligned}
$$

$\square$

## Wielomiany Czebyszewa są wielomianami

Z (17) widzimy, że najniższe “wielomiany” Czebyszewa są wielomianami. Relacja rekurencyjna (18) pozwala konstruować kolejne “wielomiany” Czebyszewa znając dwa poprzednie. Ponieważ relacja ta obejmuje wyłącznie operacje algebraiczne — mnożenie przez zmienną, mnożenie przez stałą i dodawanie — kolejne konstruowane funkcje $T_k(x)$ są wielomianami. Widzimy zatem, że “wielomiany” Czebyszewa faktycznie są wielomianami, a ponadto unormowane wielomiany Czebyszewa stanowią układ wielomianów ortogonalnych, a zatem także bazę ortonormalną, w przestrzeni (13).

Uwaga: Definicja (14) obowiązuje tylko dla $x \in [-1, 1]$. Ponieważ jednak wielomiany Czebyszewa są wielomianami, można je przedłużyć na całą oś rzeczywistą, $\mathbb{R}$, a nawet na całą płaszczyznę zespoloną, $\mathbb{C}$. Można udowodnić, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$,

$$T_k(x) = \frac{\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^k + \left(x + \sqrt{1-x^2}\right)^k}{2} \tag{20}$$

co z kolei łatwo jest uogólnić na argumenty zespolone.

## Własności wielomianów Czebyszewa

1. $T_k(-x) = (-1)^k T_k(x)$.
2. Miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa są jednokrotne, rzeczywiste i leżą w przedziale $(-1, 1)$. Miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa wysokich rzędów zagęszczają się w pobliżu krańców przedziału.
3. Wielomiany Czebyszewa są wielomianami o najmniejszym wahaniu: wielomian $\frac{1}{2^{k-1}} T_k(x)$ ma współczynnik wiodący (współczynnik przy najwyższej potędze) równy 1 oraz tę własność, że spośród wszystkich wielomianów stopnia $k$ o współczynniku wiodącym równym 1, różnica pomiędzy najmniejszą a największą wartością wielomianu na przedziale $[-1, 1]$ jest najmniejsza dla wielomianów Czebyszewa.

Wielomiany Cebyszewa mają *olbrzymie* znaczenie w analizie numerycznej i w teorii aproksymacji.

## Wielomiany Laguerre'a

Wielomiany Laguerre'a są wielomianami ortogonalnymi w przestrzeni

$$L_2([0,\infty),e^{-x}) = \left\{ f : [0,\infty) \to \mathbb{C} : \int\limits_0^\infty |f(x)|^2 \, e^{-x} \, dx < +\infty \right\} \tag{21}$$

Jest to także nieskończeniewymiarowa przestrzeń liniowa, w której zadajemy iloczyn skalarny

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_0^\infty f^*(x) g(x) \, e^{-x} \, dx \tag{22}$$

Ponieważ wielomiany Laguerre'a są ważne w jednostronnym przedziale niewłaściwym $[0, \infty)$, ich własności parzystości są nieistotne.

Wielomiany Laguerre'a można definiować albo poprzez formułę Rodriguesa

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-x} x^n \right) \tag{23a}$$

lub jako regularne w zerze rozwiązania równania różniczkowego

$$x \frac{d^2 L_n}{dx^2} + (1 - x) \frac{dL_n}{dx} + n L_n(x) = 0 \tag{23b}$$

Wielomiany Laguerre'a spełniają zależność rekurencyjną ($n \geqslant 1$)

$$(n + 1) L_{n+1}(x) = (2n + 1 - x) L_n(x) - n L_{n-1}(x) \tag{24}$$

Wielomiany Laguerre'a są niezbędne w mechanice kwantowej jako części radialne funkcji własnych kwantowego atomu wodoru.

## Wielomiany Hermite'a

Wielomiany Hermite'a są wielomianami ortogonalnymi w przestrzeni

$$L_2((-\infty,+\infty),e^{-x^2}) = \left\{ f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{C} : \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, e^{-x^2}\, dx < +\infty \right\} \tag{25}$$

Jest to także nieskończeniewymiarowa przestrzeń liniowa, w której zadajemy iloczyn skalarny

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g(x)\, e^{-x^2}\, dx \tag{26}$$

Wielomiany Hermite'a można definiować poprzez formułę Rodriguesa

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{27a}$$

lub jako regularne w zerze rozwiązania równania różniczkowego

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} + (2n + 1 - x^2) H_n(x) = 0 \tag{27b}$$

i spełniają relację rekurencyjną

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - H_n'(x)\,. \tag{28}$$

Ponadto $H_n(-x) = (-1)^n \, H_n(x)$.

Wielomiany Hermite'a określają funkcje własne kwantowego oscylatora harmonicznego, wobec czego są absolutnie niezbędne w mechanice kwantowej.

Uwaga: Wszystkie rozważane w tym wykładzie przestrzenie funkcyjne $L_2([-1,1],1)$, $L_2([-1,1],(1-x^2)^{-1/2})$, $L_2([0,\infty),e^{-x})$, $L_2((-\infty,\infty),e^{-x^2})$ wraz z określonymi na nich iloczynami skalarnymi i zadawanymi przez nie metryki, są przestrzeniami Hilberta, to znaczy są zupełne: wszystkie ciągi Cauchy'ego elementów tych przestrzeni są w tych przestrzeniach zbieżne.