Fizyka dla firm — Matematyka

25. Całka oznaczona

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

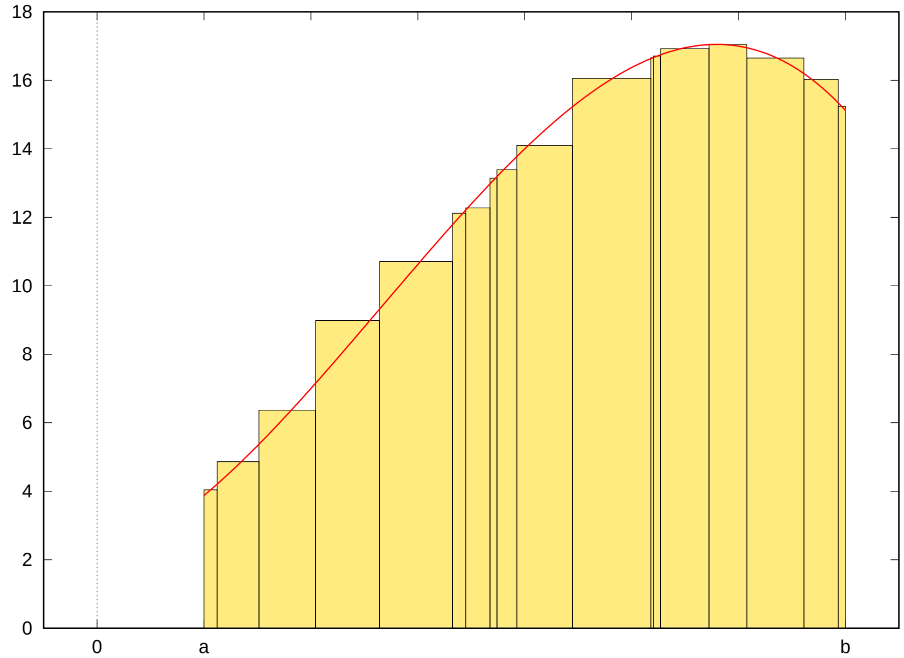
17 marca 2021

Sumy Riemanna

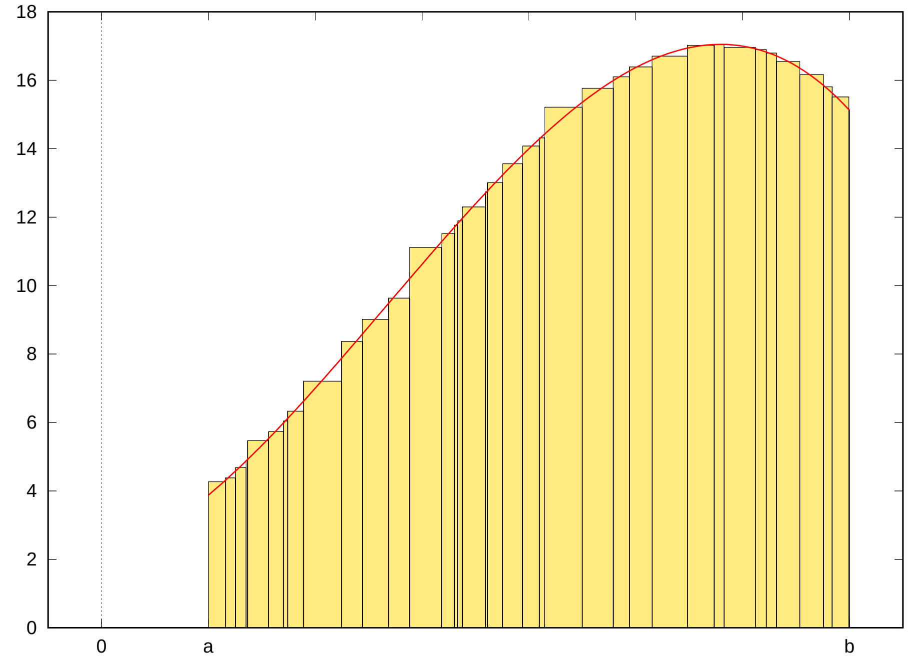
Niech będzie dana pewna funkcja $f(x)$ i pewien przedział $[a, b]$. Tworzymy ciąg $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \equiv b$. W każdym przedziale $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, wybieramy pewien punkt $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, a następnie tworzymy sumę

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \tag{1}$$

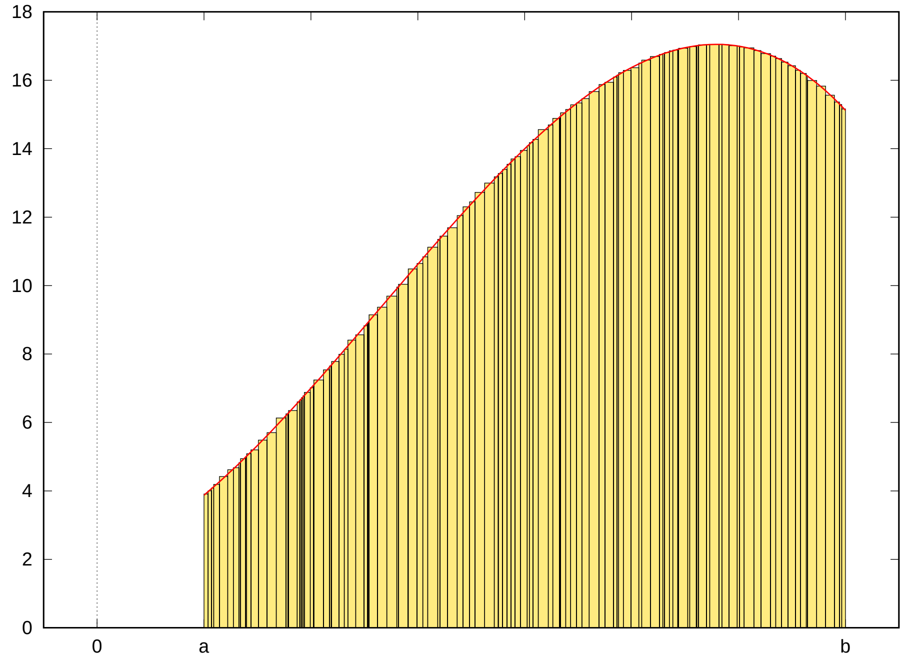
Sumę (1) nazywam suma Riemanna. Każdy element sumy Riemanna jest równy polu prostokąta o podstawie $x_i - x_{i-1}$ i wysokości $f(\xi_i)$.



W sumie Riemanna poszczególne przedziały nie muszą być równe, a punkty pośrednie ξ_i nie są wybierane w jakiś szczególny sposób. Czerwona linia jest wykresem funkcji $f(x)$.



Zagęszczamy podział. Liczba przedziałów rośnie, a ich średnia długość się zmniejsza.



Jeszcze bardziej zagęszczamy podział.

Całka Riemanna

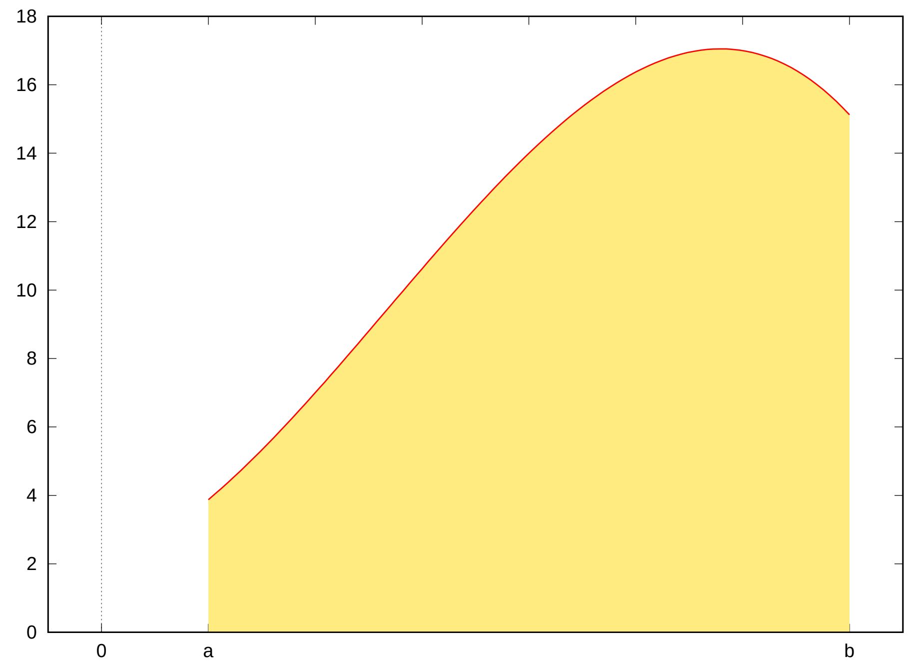
Jeżeli dla każdego podziału o tej własności, że długość najdłuższego podprzedziału dąży do zera

$$\lim_{n\to\infty} \max |x_i - x_{i-1}| = 0 \tag{2}$$

granica ciągu sum Riemanna (1) istnieje i nie zależy od sposobu wyboru punktów ξ_i, granicę tę nazywam całką oznaczoną funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$ i oznaczam

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \tag{3}$$

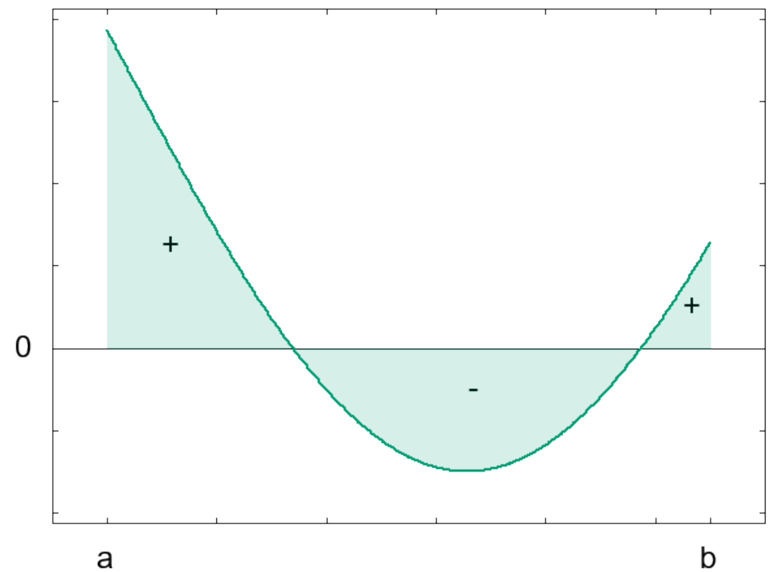
Symbol całki $\int$ nawiązuje do wydłużonego symbolu sumowania i ma oddawać intuicję, że całka oznaczona to suma nieskończenie wielu nieskończenie małych przyczynków ☺.



Jeżeli całka (3) istnieje, ciąg sum Riemanna jest zbieżny do pola pod wykresem funkcji w granicach całkowania. Jest to geometryczna interpretacja całki oznaczonej.

Ujemne pole

Jeżeli funkcja może przybierać wartości ujemne, pole leżące *nad* wykresem funkcji, ale poniżej osi x, jest traktowane jako *ujemne*: W obszarze, gdzie wartości funkcji są ujemne, prostokąty wchodzące w skład sumy Riemanna mają ujemne wysokości.



Całkowalność

Jeżeli całka oznaczona

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

istnieje, mówimy, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna na przedziale $[a,b]$.

Można udowodnić, że każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym $[a,b]$ (łącznie z krańcami przedziału) jest na tym przedziale całkowalna.

Niecałkowalne mogą być funkcje nieciągłe wewnątrz lub na krańcach przedziału. Funkcje całkowalne na przedziałach skończonych mogą być niecałkowalne na przedziałach nieskończonych — patrz niżej. Całkowalność jest warunkiem słabszym, niż ciągłość: niektóre funkcje nieciągłe są całkowalne.

“Nie zależy od sposobu wyboru punktów pośrednich”

Rozpatrzmy funkcję Dirichleta

$$f_D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ jest liczbą wymierną} \\ 0 & x \text{ jest liczbą niewymierną} \end{cases} \tag{4}$$

Można łatwo udowodnić, że funkcja ta nie jest ciągła w żadnym punkcie. Spróbujmy obliczyć całkę oznaczoną z tej funkcji

$$\int\limits_0^1 f_D(x)\,dx \tag{5}$$

Ponieważ w definicji całki Riemanna mowa jest o *każdym możliwym* podziale przedziału całkowania, podzielmy odcinek $[0, 1]$ na podprzedziały od długości 2^{-s} każdy: dwa podprzedziały o długości $1/2$, cztery podprzedziały o długości $1/4, \dots,$ 1024 podprzedziały o długości $1/1024$ itd. Granice tych podprzedziałów są liczbami wymiernymi. Jeśli więc weźmiemy jako punkty pośrednie lewe krańce każdego podprzedziału, $\xi_i = x_{i-1}$, $f_D(\xi_i) = 1$ i ciąg sum Riemanna jest ciągiem stałym o wartości $s_n = 1$.

Z drugiej strony, jeśli przy takich samych podprzedziałach każdy z nich podzielimy w "złotej proporcji", $\xi_i = x_{i-1} + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)(x_i - x_{i-1})$, punkty pośrednie będą niewymierne, $f_D(\xi_i) = 0$ i ciąg sum Riemanna jest ciągiem stałym o wartości $s_n = 0$.

Jak widzimy, ciąg sum Riemanna **nie** dąży do określonej granicy niezależnie od sposobu wyboru punktów pośrednich, a zatem całka Riemanna z funkcji Dirichleta (4) **nie istnieje**.

Całka Lebesgue’a

Zdefiniowana powyżej całka Riemanna jest dość prosta i nie obejmuje wielu interesujących z matematycznego punktu widzenia przypadków. Istnieje znacznie bardziej ogólna — i trudniejsza — definicja całki oznaczonej, zwana całką Lebesgue’a.

Z drugiej strony całka Riemanna w zupełności wystarcza do bardzo wielu zastosowań “praktycznych”, w fizyce stosowanej i w innych naukach, w tym w naukach inżynierskich.

Można udowodnić, że jeśli istnieje całka Riemanna, to istnieje także całka Lebesgue’a i ich wartości są równe. W drugą stronę to twierdzenie nie zachodzi. Całka w sensie Lebesgue’a z funkcji Dirichleta (4) istnieje i jest równa 0.

Własności całki oznaczonej

Całka jest operacją liniową:

$$\int\limits_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\, dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\, dx \tag{6}$$

dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, jeżeli tylko całki $\int_a^b f(x)\, dx$, $\int_a^b g(x)\, dx$ istnieją.

Całka jest addytywna:

Jeżeli całka $\int_a^b f(x)\, dx$ istnieje, to

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx \tag{7}$$

dla dowolnego $a < c < b$.

Odwrócenie granic całkowania:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx \tag{8}$$

Odwrócenie granic całkowania sprawia, że “szerokości” prostokątów w sumie Riemanna (1) stają się ujemne.

Całka z funkcji ograniczonej:
Jeżeli $f(x)$ jest całkowalna na $[a, b]$ oraz $\forall x \in [a, b]$: $|f(x)| \leqslant M$, to

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M\,|b-a| \tag{9}$$

Całkowe twierdzenie o wartości średniej

Twierdzenie: Jeżeli w przedziale $[a, b]$ funkcja $f(x)$ jest ciągła, a funkcja $g(x)$ jest całkowalna i stale nieujemna lub stale niedodatnia, to istnieje punkt $\xi \in (a, b)$ taki, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \tag{10}$$

Obserwacja: Powyższe twierdzenie odnosi się także do przypadku $g(x) \equiv 1$. Wówczas jeżeli $f(x)$ jest ciągła na $[a, b]$, to istnieje $\xi \in (a, b)$ taki, że

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a) \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{11}$$

Całka jako funkcja górnej granicy całkowania

Niech funkcja $f(t)$ będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$. Wówczas $\forall x \in [a, b]$ całka

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{12}$$

Istnieje. $F(x)$ jest funkcją górnej granicy całkowania w (12). Można pokazać, że

- funkcja $F(x)$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$,
- w każdym punkcie, w którym $f(x)$ jest ciągła

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \tag{13}$$

Wniosek: Każda funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ ma w tym przedziale funkcję pierwotną, daną wzorem (12).

Przykład 1

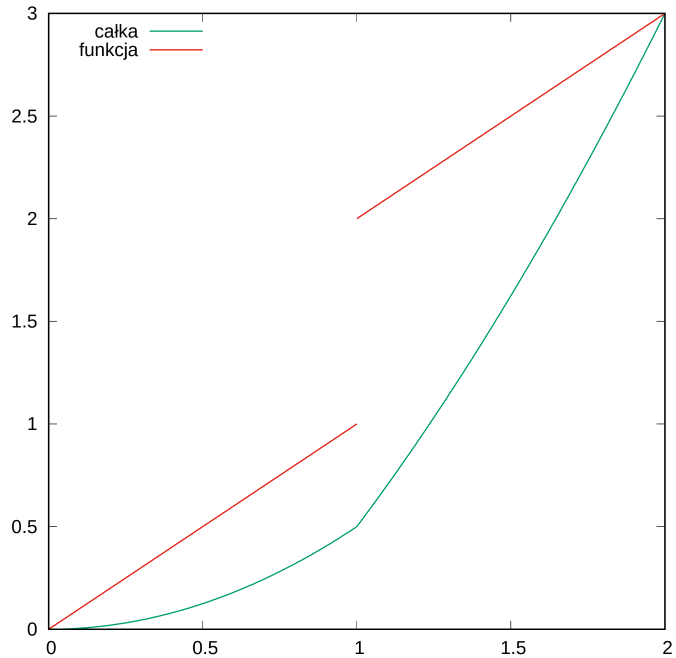
Rozpatrzmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leqslant 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases} \tag{14}$$

Niech $x \in [0, 2]$. W tym przedziale funkcja pierwotna funkcji (14) ma postać

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & x \leqslant 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + x - 1 & x > 1 \end{cases} \tag{15}$$

(ostatnią równość uzasadnimy za chwilę).



W punkcie skoku całka jako funkcja górnej granicy całkowania jest ciągła, ale nie jest różniczkowalna.

Związek pomiędzy całką oznaczoną a nieoznaczoną

Niech $f(x)$ będzie **całkowalna** na przedziale $[a, b]$ i niech $F(x)$ będzie jej funkcją pierwotną:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{16a}$$

Wówczas

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{16b}$$

co często zapisujemy

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b \tag{16c}$$

Przykład 2

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{7}{3} \tag{17a}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = (-\cos x)|_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1 \tag{17b}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2} \tag{17c}$$

Przykład 3

Wzoru (16b) nie wolno używać bezmyślnie! Stosuje się on tylko do funkcji całkowalnych! Rozpatrzmy całkę

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{2} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{-2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \tag{18a}$$

Otrzymaliśmy absurdalny wynik: całka z funkcji stale nieujemnej jest ujemna?! Rzecz w tym, że wzoru (16b) nie można w tym wypadku stosować, gdyż całka (18a) nie istnieje.

Aby się o tym przekonać, napiszmy

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int\limits_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \int\limits_{\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x^2} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\bigg|_{-2}^{-\varepsilon} + \left(-\frac{1}{x}\bigg|_{\varepsilon}^{2} \right) \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-\frac{1}{-\varepsilon} - \left(-\frac{1}{-2} \right) + (-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{2}{\varepsilon} - 1 \right) = +\infty
\end{aligned}
\tag{18b}
$$

Całka (18a) jest rozbieżna. Wzoru (16b) nie można wobec tego stosować.

Zmiana zmiennych w całce oznaczonej

Znaną techniką obliczania całek nieoznaczonych jest zmiana zmiennych (podstawienie). Podobnie postępujemy w przypadku całek oznaczonych, z tym, że należy także pamiętać o przekształceniu granic całkowania.

Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w zbiorze wartości funkcji $x = \varphi(t)$, ciągłej i mającej ciągłą pochodną w przedziale $[\alpha, \beta]$, i jeżeli $a = \varphi(\alpha)$ oraz $b = \varphi(\beta)$, to

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \tag{19}$$

Przykład 4

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx &= \left|\begin{array}{l} 1-x^2=u \\ -2x\,dx=du \\ x\,dx=-\frac{du}{2} \\ x=0\to u=1 \\ x=1\to u=0 \end{array}\right| = \int_1^0 \sqrt{u}\left(-\frac{du}{2}\right) \\
&= -\int_0^1 \sqrt{u}\left(-\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1^{3/2}-0^{3/2}\right) = \frac{1}{3} \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Całkowanie po przedziałach symetrycznych

Jeśli funkcja jest parzysta

$$f(-x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-A}^{A} f(x)\, dx = 2\int\limits_{0}^{A} f(x)\, dx \tag{21a}$$

Jeśli funkcja jest nieparzysta

$$f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-A}^{A} f(x)\, dx = 0 \tag{21b}$$

Dla funkcji, które nie są ani parzyste, ani nieparzyste, żadne relacje tego typu w ogólności nie zachodzą.

Przykład 5

Obliczmy pole okręgu o promieniu r. Okrąg opisany jest równaniem

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{22a}$$

Z symetrii widać, że pole części okręgu leżącej nad osią OX jest równe polu części okręgu leżącej pod osią OX. Zajmijmy się górną połówką, $y \geqslant 0$, $-r \leqslant x \leqslant r$. Pole górnej połówki jest polem pod wykresem funkcji opisującej górną połówkę okręgu, czyli całką z tej funkcji. Dla całego pola mamy

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{r^2 - x^2} && \text{(22b)}\\
S &= 2\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\int\limits_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \\
&= \left| \begin{array}{l} x = r\sin t \\ dx = r\cos t\, dt \\ x = 0 \to t = 0 \\ x = r \to t = \pi/2 \end{array} \right| = 4\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\, r\cos t\, dt \\
&= 4r^2 \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 4\cdot\frac{r^2}{2}\left(t + \sin t\cos t\right)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= 2r^2\left(\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 0 - \sin 0\cos 0\right) = \pi r^2 && \text{(22c)}
\end{aligned}
$$

Całkowanie po przedziale nieskończonym

$$\int_A^\infty f(x)\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_A^B f(x)\,dx \tag{23}$$

gdzie A jest jakąś skończoną liczbą.

Aby całka (23) istniała, muszą być spełnione *dwa* warunki:

- całki po przedziałach skończonych $\int_A^B f(x)\,dx$ muszą istnieć,
- musi istnieć granica $B \to \infty$.

Całkowalność na przedziałach $[A, B]$ jest “zwykłym” problemem. Nowe zagadnienia mogą pojawić się w związku z przejściem granicznym.

Przykład 6

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{B\to\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^2} = \lim_{B\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^B = \lim_{B\to\infty} \left(1 - \frac{1}{B}\right) = 1 \quad (24)$$

Przykład 7

Całka

$$\int_0^\infty \cos x \, dx \quad (25)$$

nie istnieje, gdyż granica $\lim_{B\to\infty} \sin B$ nie istnieje.

Przykład 8

Rozpatrzmy całkę

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \lim_{B\to\infty}\int\limits_0^B \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= \left|\begin{array}{l} 1+x^2=u \\ 2x\,dx=du \\ x=0\to u=1 \\ x=B\to u=1+B^2 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\lim_{B\to\infty}\int\limits_1^{1+B^2}\frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{B\to\infty}\ln u\Big|_1^{1+B^2} = \frac{1}{2}\lim_{B\to\infty}\ln(1+B^2) \\
&\sim \lim_{B\to\infty}\ln B = +\infty
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Całka (26) nie istnieje. Aby całka po przedziale nieskończonym mogła istnieć, ogon funkcji podcałkowej musi dostatecznie szybko znikać w nieskończoności, co najmniej jak $1/|x|^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$.

Podobnie definiuje się całkę po przedziale $\int_{-\infty}^{B}$. Zagadnienia związane z tą całką są bardzo podobne.

Przykład 9

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{B\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^B = -\left(\lim_{B\to\infty} e^{-B}\right) - (-e^0) = 1 \tag{27}$$

Przykład 10

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx &= -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\Big|_0^\infty \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{2}e^{-0}(\sin 0 + \cos 0)\right) = \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{28}$$

Całki $\int_{-\infty}^{\infty}$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{A\to\infty} \lim_{B\to\infty} \int\limits_{-A}^{B} f(x)\, dx \tag{29}$$

Aby całka (29) istniała, muszą być spełnione trzy warunki:

- całki po przedziałach skończonych muszą istnieć,
- funkcja podcałkowa w obu niskończonościach musi znikać dostatecznie szybko,
- podwójna granica musi istnieć niezależnie od tego, w jaki sposób A, B zmierzają do nieskończoności.

Przykład 11

Rozpatrzmy całkę podobną do (26)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx \tag{30a}$$

Jeżeli będziemy całkować po przedziałach symetrycznych

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} \frac{x}{1+x^2} = 0 \tag{30b}$$

gdyż funkcja podcałkowa jest nieparzysta, a przedział całkowania jest symetryczny względem $x = 0$. Taką interpretację całki $\int_{-\infty}^{\infty}$ — całkowanie po przedziałach symetrycznych względem $x = 0$ (lub względem innego wybranego punktu) — nazywa się wartością główną całki. Zapisujemy (P jak *principal value*)

$$P \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx = 0 \tag{30c}$$

Nie jest to jednak jedyny możliwy wybór granic całkowania, które w granicy odtwarzają całą oś rzeczywistą. Weźmy na przykład

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \lim_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{2A} \frac{x}{1+x^2} \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(\int\limits_{-A}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int\limits_{0}^{2A} \frac{x}{1+x^2}\,dx \right) \\
&= \lim_{A\to\infty} \int\limits_{A}^{2A} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2} \lim_{A\to\infty} \ln u \Big|_{1+A^2}^{1+4A^2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{A\to\infty} \ln \frac{1+4A^2}{1+A^2} = \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2 \qquad \text{(30d)}
\end{aligned}
$$

Z drugiej strony gdybyśmy wzięli

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{-2A}^{A} \frac{x}{1+x^2}\,dx = -\ln 2 \tag{30e}$$

Biorąc inne zależności pomiędzy A, B, moglibyśmy dostać jeszcze inne wyniki. Wobec tego całka (30a) nie istnieje.