

Fizyka dla firm — Matematyka

24. Całki nieoznaczone:

Całki funkcji trygonometrycznych i niewymiernych

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

28 stycznia 2021

Proste całki z funkcji trygonometrycznych

“Proste” całki funkcji trygonometrycznych to takie, w których łatwo zastosować można podstawienie $\sin x = t$ lub $\cos x = t$.

Przykład 1

$$\begin{aligned}\int \sin^7 x \, dx &= \int (\sin^6 x) \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^3 \sin x \, dx \\ &= \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x \, dx = -dt \end{array} \right] = - \int (1 - t^2)^3 \, dt \\ &= - \int (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6) \, dt = -t + t^3 - \frac{3}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 \\ &= -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x \quad (1)\end{aligned}$$

Podobnie obliczamy całki $\int \cos^{2n+1} x \, dx$, $\int \sin^{2n} x \cos x \, dx$, $\int \cos^{2n} \sin x \, dx$.

Podstawienie “uniwersalne”

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\end{aligned}\tag{2a}$$

$$\begin{aligned}
 \cos x &= \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\
 &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \\
 &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \tag{2b}
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \tag{2c}$$

W ten sposób wyraziliśmy funkcje sinus, kosinus, tangens poprzez *wymierne* funkcje tangensa argumentu połówkowego.

Jeśli zatem mamy do obliczenia całkę z dowolnej **wymiernej** funkcji sinus, kosinusa, tangensa, możemy ją obliczyć poprzez “podstawienie uniwersalne”:

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x) dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = u \\ x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} u \\ dx = \frac{2}{1+u^2} du \end{array} \right] = \int \tilde{\mathcal{R}}(u) du \quad (3)$$

gdzie $\tilde{\mathcal{R}}$ jest **wymierną** funkcją swojego argumentu.

Przykład 2

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2 + \cos x} &= \int \frac{1}{2 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2 du}{1+u^2} = 2 \int \frac{du}{u^2 + 3} \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{du}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \left[\begin{array}{l} \frac{u}{\sqrt{3}} = t \\ du = \sqrt{3} dt \end{array} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \quad (4)\end{aligned}$$

Przykład 3

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} \quad (5a)$$

Ten przykład ma pokazać, że do problemu obliczania całek z funkcji trygonometrycznych nie należy podchodzić mechanicznie. Do całki (5a) moglibyśmy zastosować “podstawienie uniwersalne” i owszem, dostalibyśmy funkcję wymierną, ale jej mianownik byłby wielomianem stopnia ósmego. Zamiast tego najpierw korzystamy z tożsamości trygonometrycznych.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} &= \int \frac{dx}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x} \\
&= \int \frac{dx}{1 - \frac{1}{2}(2 \sin x \cos x)^2} = \int \frac{dx}{1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)} \\
&= \left[\begin{array}{l} 2x = y \\ dx = \frac{1}{2} dy \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 y} = \dots \quad (5b)
\end{aligned}$$

Dopiero teraz skorzystamy z podstawienia $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = u$:

$$\begin{aligned}
\dots &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2u}{1+u^2} \right)^2} \cdot \frac{2 du}{1+u^2} = \int \frac{1+u^2}{(1+u^2)^2 - 2u^2} du \\
&= \int \frac{1+u^2}{1+u^4} du = \int \frac{1+u^2}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 - \sqrt{2}u + 1)} du \quad (5c)
\end{aligned}$$

Dokonujemy rozkładu na ułamki proste:

$$\frac{1 + u^2}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1)} \equiv \frac{Au + B}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} + \frac{Cu + D}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \quad (5d)$$

$$A = C = 0, B = D = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\dots &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\frac{1}{2} [(\sqrt{2}u - 1)^2 + 1]} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{\frac{1}{2} [(\sqrt{2}u + 1)^2 + 1]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}u - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}u + 1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} - 1\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} + 1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1) \quad (5e)
\end{aligned}$$

Całki funkcji cyklometrycznych

Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, dx &= \int (x)' \arcsin x \, dx \\ &= x \arcsin x - \int x (\arcsin x)' \, dx \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= \left[\begin{array}{l} 1-x^2 = t^2 \\ x \, dx = -t \, dt \end{array} \right] = x \arcsin x + \int \frac{t}{\sqrt{t^2}} \, dt \\ &= x \arcsin x + t = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad (6)\end{aligned}$$

Przykład 4

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \, dx = \left[\begin{array}{l} \arcsin x = t \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \\ x = \sin t \end{array} \right] = \int t \sin^2 t \, dt \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \int t \sin^2 t \, dt &= \int t \sin t (-\cos t)' \, dt \\ &= -t \sin t \cos t + \int (t \sin t)' \cos t \, dt \\ &= -t \sin t \cos t + \int \sin t \cos t \, dt + \int t \cos^2 t \, dt \\ &= -t \sin t \cos t + \frac{1}{2} \sin^2 t + \frac{1}{2} t^2 - \int t \sin^2 t \, dt \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \, dx = \frac{1}{4} (\arcsin x)^2 + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \arcsin x \quad (7c)$$

Całki z funkcji niewymiernych

Całki z funkcji niewymiernych często nie dają się wyrazić przez skończoną kombinację funkcji elementarnych — zwłaszcza jeśli wykładniki są niewymierne. Istnieje bardzo dużo szczegółowych przypadków, wobec czego omówimy tylko przypadek pierwiastków z trójmianu kwadratowego.

Jeśli wyróżnik trójmianu jest ujemny, sprowadzamy wyrażenie do postaci $\sqrt{1 - x^2}$, jeśli natomiast wyróżnik trójmianu jest dodatni, sprowadzamy do postaci $\sqrt{x^2 + k}$, $k > 0$. Wówczas stosujemy podstawienie Eulera $x + \sqrt{x^2 + k} = t$ i próbujemy doprowadzić wyrażenie podcałkowe do postaci funkcji wymiernej.

Przykład 5

Niech $k > 0$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} &= \left[\begin{array}{l} x + \sqrt{x^2 + k} = t \\ x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{k}{t} \right) \\ dx = \frac{t^2 + k}{2t^2} dt \\ \sqrt{x^2 + k} = t - x = \frac{t^2 + k}{2t} \end{array} \right] \\ &= \int \frac{\frac{t^2 + k}{2t^2}}{\frac{t^2 + k}{2t}} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| = \operatorname{ar} \cosh x \Big|_{k=1} \end{aligned} \quad (8)$$

Uwaga: Jeżeli całkę da się obliczyć za pomocą “prostego” podstawienia $x^2 \pm k = t$, należy tak zrobić, jak w całkach $\int x \sqrt{x^2 + k} dx$, $\int x dx / \sqrt{x^2 + k}$.

Przykład 6

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{x^2 + k} dx &= \left[\begin{array}{l} x^2 + k = t \\ x dx = \frac{1}{2} dt \\ x^2 = t - k \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int (t - k) \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{3}{2}} dt - \frac{k}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{5} (x^2 + k)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} (x^2 + k)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (9)$$