

Fizyka dla firm — Matematyka

22. Całka nieoznaczona

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

21 stycznia 2021

Funkcja pierwotna

Obliczanie całek nieoznaczonych jest operacją odwrotną do różniczkowania. Mianowicie, mówimy że

$$\int f(x)dx = F(x) + C \iff \frac{dF}{dx} = f(x) \quad (1)$$

gdzie C jest pewną stałą, zwaną *stałą całkowania*. Funkcję $F(x)$ nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji $f(x)$. Z własności różniczkowania wynika, że do funkcji pierwotnej można dodać dowolną stałą; w przyszłości zazwyczaj będziemy stałą całkowania pomijać we wzorach.

Podstawowe własności całki nieoznaczonej

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad (2)$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \quad (3)$$

gdzie k jest dowolną stałą. Własności te wynikają wprost z własności różniczkowania.

Przykład 1

$$\int dx = x + C \quad (4)$$

gdyż $x' = 1$.

Trudność w obliczaniu całek nieoznaczonych polega na tym, że, w przeciwieństwie do różniczkowania, nie ma prostego zestawu reguł pozwalających wyznaczać funkcje pierwotne.

Wiele “prostych”, “porządnych” funkcji nie ma funkcji pierwotnych (całek oznaczonych), które dałoby się zapisać w zwarty sposób.

Przykład 2

Można udowodnić, że całki

$$\int e^{-x^2} dx \quad (5)$$

nie da się wyrazić za pomocą skończonej kombinacji funkcji elementarnych.

Całki funkcji elementarnych

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1}, \quad a \neq -1 \quad (6)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| \quad (7)$$

$$\int e^x dx = e^x \quad (8)$$

$$\int \cos x dx = \sin x \quad (9)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \quad (12)$$

Uwaga o stałej całkowania

Ponieważ

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (13a)$$

mamy

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x. \quad (13b)$$

Wynik (13b) jest *inny*, niż ten dany wzorem (11). Aby rozstrzygnąć tę pozorną sprzeczność, zauważmy, że

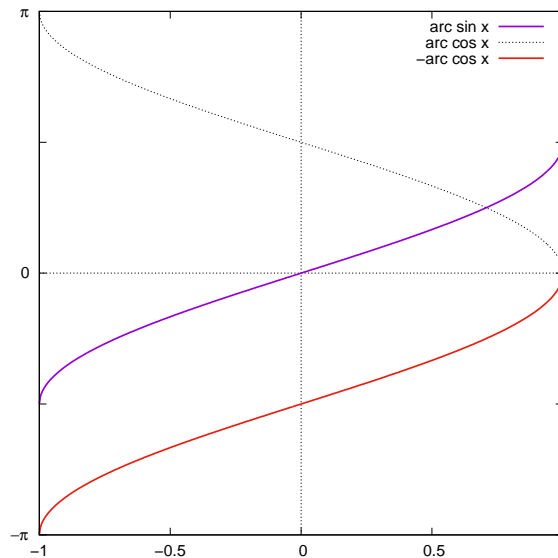
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(-\arccos x) = x = \sin(\arcsin x) \quad (13c)$$

więc biorąc pod uwagę monotoniczność funkcji sinus w przedziale odwra-

całności,

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \quad (13d)$$

Widzimy, że funkcje (11), (13b) są równe *z dokładnością do stałej*, równej w tym wypadku $\pi/2$. A całka oznaczona (funkcja pierwotna) jest określona z dokładnością do stałej całkowania.



Dziękuję studentowi, który zwrócił mi na to uwagę w trakcie wykładu.

Dwie inne całki z funkcji elementarnych

$$\begin{aligned}(\operatorname{ar sinh} x)' &= \left[\ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \right]' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\end{aligned}\quad (14)$$

Zatem

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{ar sinh} x \quad (15)$$

Podobnie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{ar} \cosh x \quad (16)$$

Całkowanie przez podstawienie

Jeżeli $f(x)$ jest ciągła w pewnym przedziale, a $g(x)$ ma w tym przedziale ciągłą pochodną, to w tym przedziale

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du, \quad (17)$$

po czym po scałkowaniu prawej strony należy w wyniku podstawić $u = g(x)$. Wzór (17) wynika wprost ze wzoru na pochodną funkcji złożonej.

Przykład 3

$$\int \cos(2x) dx = \left[\begin{array}{l} 2x = u \\ 2dx = du \\ dx = \frac{1}{2}du \end{array} \right] = \int \frac{1}{2} \cos u du = \frac{1}{2} \sin u = \frac{1}{2} \sin(2x) \quad (18)$$

Przykład 4

$$\begin{aligned} \int a^x dx &= \int (e^{\ln a})^x dx = \int e^{x \ln a} dx = \left[\begin{array}{l} x \ln a = t \\ dx = \frac{1}{\ln a} dt \end{array} \right] = \frac{1}{\ln a} \int e^t dt \\ &= \frac{1}{\ln a} e^t = \frac{1}{\ln a} a^x, \end{aligned} \quad (19)$$

przy czym zakładamy, że $a > 0$, $a \neq 1$.

Przykład 5

$$\int \frac{dx}{2x-1} = \left[\begin{array}{l} 2x-1 = s \\ dx = \frac{1}{2} ds \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{ds}{s} = \frac{1}{2} \ln |s| = \frac{1}{2} \ln |2x-1| \quad (20)$$

Przykład 6

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{2x^3-3}} dx &= \left[\begin{array}{l} 2x^3-3 = t^2 \\ 6x^2 dx = 2t dt \\ x^2 dx = \frac{1}{3} t dt \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{t}{\sqrt{t^2}} dt = \frac{1}{3} \int dt = \frac{1}{3} t \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{2x^3-3} \end{aligned} \quad (21)$$

Przykład 7

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1} = \int \frac{dx}{\frac{3}{4} \left[\frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]} \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \left[\begin{array}{l} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = u \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2} du \end{array} \right] = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} u = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \quad (22)\end{aligned}$$

Jest to ogólna zasada postępowania z “nierozkładalnymi” trójmianami kwadratowymi. Z kolei trójmiany o wyróżniku dodatnim doprowadzamy do postaci $\pm(1 - u^2)$.

Przykład 8

Niech $n \neq 1$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx &= \left[\begin{array}{l} x^2 + a^2 = u \\ x dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int u^{-n} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-n + 1} u^{-n+1} \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \end{aligned} \quad (23)$$

Przykład 9

W wyniku takiego podstawienia, jak w poprzednim przypadku

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) \quad (24)$$

Zastosowanie pochodnej logarytmicznej

W ostatnim przykładzie licznik, z dokładnością do stałej, był pochodną mianownika. Łatwo to uogólnić:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left[\begin{array}{l} f(x) = s \\ f'(x) dx = ds \end{array} \right] = \int \frac{ds}{s} = \ln |s| = \ln |f(x)| \quad (25)$$

Proszę przypomnieć sobie wzór na pochodną logarytmiczną.

Przykład 10

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx &= \left[\begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right] = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} (e^x) \end{aligned} \quad (26)$$

Przykład 11

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}} dx &= \left[\begin{array}{l} x+1 = s \\ dx = ds \end{array} \right] = \int \frac{s-2}{s^{\frac{1}{3}}} ds = \int s^{\frac{2}{3}} ds - 2 \int s^{-\frac{1}{3}} ds \\ &= \frac{1}{\frac{2}{3}+1} s^{\frac{2}{3}+1} - \frac{2}{-\frac{1}{3}+1} s^{-\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{5} (x+1)^{\frac{5}{3}} - 3(x+1)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{5} (x-4) \sqrt[3]{(x+1)^2} \quad (27)\end{aligned}$$

Całkowanie przez części

Ze wzoru na pochodną iloczynu, $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, wynika, że

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx . \quad (28)$$

Wzór (28) nazywa się “wzorem na całkowanie przez części”. Jest on niezwykle pomocny w całkowaniu niektórych funkcji.

Przykład 12

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int x (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx \\ &= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = (x - 1) e^x\end{aligned}\quad (29)$$

Przykład 13

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(\omega x) dx &= \int x^2 \left(\frac{1}{\omega} \sin(\omega x) \right)' dx \\ &= \frac{1}{\omega} x^2 \sin(\omega x) - \frac{2}{\omega} \int x \sin(\omega x) dx \\ &= \frac{1}{\omega} x^2 \sin(\omega x) - \frac{2}{\omega} \int x \left(-\frac{1}{\omega} \cos(\omega x) \right)' dx \\ &= \frac{1}{\omega} x^2 \sin(\omega x) + \frac{2}{\omega^2} x \cos(\omega x) - \frac{2}{\omega^2} \int \cos(\omega x) dx \\ &= \frac{1}{\omega} x^2 \sin(\omega x) + \frac{2}{\omega^2} x \cos(\omega x) - \frac{2}{\omega^3} \sin(\omega x)\end{aligned}\tag{30}$$

Wzór na całkowanie przez części został zastosowany dwukrotnie.

Przykład 14

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \sin x (-\cos x)' \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (\sin x)' \cos x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= x - \sin x \cos x - \int \sin^2 x \, dx\end{aligned}\tag{31a}$$

$$2 \int \sin^2 x \, dx = x - \sin x \cos x\tag{31b}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x)\tag{31c}$$