Fizyka dla firm — Matematyka

21. Granica ciągu

Szeregi liczbowe i potęgowe

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

18 stycznia 2021

Granica ciągu

Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie pewnym ciągiem liczbowym (zamiast numerować ciąg od 1, można oczywiście zacząć numerację od dowolnej innej liczby naturalnej). Mówimy, że liczba g jest granicą tego ciągu, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 : |a_n - g| < \varepsilon \tag{1}$$

Podobnie jak robiliśmy to dla funkcji, można też zdefiniować granice niewłaściwe, to znaczy sklasyfikować przypadki, w których ciąg jest rozbieżny do $-\infty$ lub $+\infty$. (Jest to oczywiście inna sytuacja od tej, w której granica ciągu *nie istnieje*!)

Przykład 1

Obliczmy granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{8}{n^2}} = \frac{2}{3}\,. \tag{2}$$

Przykład 2

Ważna granica:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,. \tag{3}$$

Definicję (1) można uogólnić na ciągi w innych przestrzeniach, w których zdefiniowane jest pojęcie odległości (metryka): wówczas zamiast wyrażenia $|a_n - g|$ bierzemy $\varrho(a_n - g)$, gdzie $\varrho(\cdot)$ oznacza metrykę. Można więc mówić o ciągach liczb zespolonych, ciągach wektorów w $\mathbb{R}^N$, ciągach macierzy, ciągach funkcyjnych (ciągach, których "wyrazami" są funkcje (!)) itd. My jednak (na razie) ograniczamy się do przypadku ciągów liczbowych.

Przykład 3

Niech $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem wektorów w $\mathbb{R}^N$, a $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^N$ będzie pewnym ustalonym wektorem. Zadajemy w $\mathbb{R}^N$ metrykę euklidesową. Mówimy wówczas, że ciąg $\{\mathbf{a}_n\}$ jest zbieżny do $\mathbf{g}$, jeżeli

$$\forall \varepsilon{>}0 \ \exists n_0 \ \forall n{>}n_0 : \sqrt{(x_{1n} - g_1)^2 + (x_{2n} - g_2)^2 + \cdots + (x_{Nn} - g_N)^2} < \varepsilon \tag{4}$$

gdzie x_{j_n} oznacza j-tą składową wektora $\mathbf{x}_n$ a g_j j-tą składową wektora $\mathbf{g}$.

Własności granic ciągów

Jeżeli ograniczymy się do ciągów liczbowych, obowiązują twierdzenia, które poznaliśmy już przy okazji analizowania pojęcia granicy funkcji. Granica sumy, iloczynu, ilorazu, funkcji złożonej są, odpowiednio, sumą, iloczynem, ilorazem, złożeniem granic — jeśli wszystkie granice, które tam występują, istnieją (a w przypadku ilorazu wykluczymy dzielenie przez zero). Występują także znane już symbole nieoznaczone.

Przykład 4

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\infty-\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0 \qquad (5)$$

Pytanie

Dlaczego powyższego przykładu NIE można robić w ten sposób:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\right]=? \qquad (6)$$

Otrzymujemy symbol nieoznaczony $0\cdot\infty$.

Przykład 5

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \infty-\infty = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2} \tag{7}$$

Inne własności granic

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do pewnej granicy, to każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy.

Ciąg rosnący i ograniczony jest zbieżny. Podobnie — dla ciągu malejącego i ograniczonego.

Każdy ciąg monotoniczny i nieograniczony jest rozbieżny do $+\infty$ lub $-\infty$.

Twierdzenie o trzech ciągach: Jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{c_n\}$ są zbieżne do wspólnej granicy, to ciąg $\{b_n\}$ spełniający

$$\exists n_0\ \forall n{>}n_0 : a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \tag{8}$$

jest zbieżny do tej samej granicy.

Definicja Heinego

Znając pojęcie granicy ciągu, możemy podać “alternatywną” definicję granicy funkcji (definicja Heinego):
Mówimy, że

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \tag{9a}$$

jeżeli **dla każdego ciągu** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ zachodzi

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \;\Rightarrow\; \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \tag{9b}$$

Można łatwo udowodnić, że definicja Heinego jest równoważna poznanej wcześniej definicji Cauchy’ego.

Ciąg Cauchy'ego

Mówimy, że ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego, jeżeli

$$\forall \varepsilon{>}0\ \exists n_0\ \forall n,m{>}n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon \tag{10}$$

Uwaga: podobnie jak granice, ciągi Cauchy'ego można definiować w dowolnych przestrzeniach, w których zadana jest metryka.

Przykład 6

Rozpatrzmy ciąg $a_n = 1/n$. Mamy

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{\min(n,m)} < \frac{2}{N} \tag{11}$$

Weźmy teraz dowolne $\varepsilon > \frac{2}{N} > 0$. Widać, że warunek definicyjny na bycie ciągiem Cauchy'ego jest spełniony dla $n, m > N$.

Własności ciągów Cauchy’ego

Każdy ciąg Cauchy’ego jest ograniczony.

Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy’ego.

Czy zachodzi sytuacja odwrotna, czy każdy ciąg Cauchy’ego jest zbieżny? To wcale nie jest takie oczywiste!

Rozpatrzmy ciąg o wyrazach *wymiernych*. Istnieje nieskończenie wiele takich ciągów, które **nie** mają granic wymiernych (na przykład ciągi przybliżeń dziesiętnych liczb niewymiernych). W zbiorze liczb wymiernych, $\mathbb{Q}$, istnieją ciągi Cauchy’ego, które nie są zbieżne, ale w zbiorze liczb rzeczywistych, $\mathbb{R}$, wszystkie ciągi Cauchy’ego są zbieżne.

Definicja: Przestrzeń, w której wszystkie ciągi Cauchy'ego są zbieżne, nazywamy przestrzenią zupełną. Alternatywnie, przestrzeń zupełna zawiera granice wszystkich swoich ciągów Cauchy'ego.

To, czy przestrzeń jest zupełna, często zależy od zadanej metryki. Przestrzenie $\mathbb{R}^N$ z metryką euklidesową i $\mathbb{C}^N$ z uogólnieniem metryki euklidesowej są zupełne.

Szeregi liczbowe

Dany jest pewien ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Tworzymy *ciąg sum częściowych* $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 && \text{(12a)}\\
S_2 &= a_1 + a_2 && \text{(12b)}\\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 && \text{(12c)}\\
&\vdots\\
S_k &= \sum_{n=1}^{k} a_n && \text{(12d)}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Jeżeli granica ciągu (12) istnieje i jest skończona, nazywa się ją sumą szeregu liczbowego i oznacza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{13}$$

Jeśli granica ciągu sum częściowych istnieje i jest skończona, szereg taki nazywa się zbieżnym. Warunkiem **koniecznym** zbieżności szeregu jest aby

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{14}$$

Nie jest to warunek wystarczający!

Przykład 7

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{15}$$

jest **rozbieżny**.

Kryteria zbieżności szeregów

Szereg o wyrazach dodatnich, mniejszych od wyrazów pewnego szeregu zbieżnego, jest zbieżny. Szereg o wyrazach dodatnich, większych od wyrazów pewnego szerego rozbieżnego, jest rozbieżny. Jest to tak zwane **kryterium porównawcze**.

Kryterium d'Alemberta: Niech $\{a_n{>}0\}$ będą wyrazami pewnego szeregu. Załóżmy, że granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g \tag{16}$$

istnieje. Jeżeli $g < 1$, szereg jest zbieżny. Jeżeli $g > 1$, szereg jest rozbieżny.

Kryterium Cauchy'ego: Niech $\{a_n{>}0\}$ będą wyrazami pewnego szeregu. Załóżmy, że granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g \tag{17}$$

istnieje. Jeżeli $g < 1$, szereg jest zbieżny. Jeżeli $g > 1$, szereg jest rozbieżny.

Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego nie rozstrzygają o zbieżności, gdy $g{=}1$.

Przykład 8

Sprawdźmy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \tag{18a}$$

Stosujemy kryterium d'Alemberta. $a_n = n!/n^n$. Zatem

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1
\end{aligned} \tag{18b}$$

a więc szereg (18a) jest zbieżny.

Przykład 9

Udowodnijmy rozbieżność szeregu harmonicznego (15) korzystając z kryterium porównawczego. Zastąpmy wyrazy tego szeregu przez ułamki, których mianownikami są najbliższe potęgi liczby 2:

$$
\begin{aligned}
& 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\dots \\
& \geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots \\
& = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{16}\right)+\dots \\
& = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Ostatnia suma jest w sposób oczywisty rozbieżna do $+\infty$. Widzimy, że wyrazy szeregu harmonicznego są większe od wyrazów szeregu rozbieżnego, a zatem, na mocy kryterium porównawczego, szereg harmoniczny jest rozbieżny.

Ten dowód został podany po raz pierwszy w XIV wieku!

Szereg geometryczny

Dany jest ciąg geometryczny

$$a_n = \begin{cases} a & n = 1 \\ q \cdot a_{n-1}\,, & n = 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{20}$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{21}$$

nazywam szeregiem geometrycznym. Jest on zbieżny gdy $|q| < 1$, a jego suma wynosi wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-q} \tag{22}$$

Szeregi harmoniczne wyższych rzędów

Szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \tag{23}$$

nazywam *szeregiem harmonicznym rzędu* r. Jest to uogólnienie szeregu harmonicznego (15). Udowodnimy, że dla $r > 1$ szereg (23) jest zbieżny. Istotnie, rozpatrujemy ciąg sum cząstkowych

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \dots + \frac{1}{n^r} \tag{24a}$$

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 + \frac{1}{2^r} + \dots + \frac{1}{9^r}\right) + \left(\frac{1}{10^r} + \dots + \frac{1}{99^r}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{100^r} + \dots + \frac{1}{999^r}\right) + \dots \end{aligned} \tag{24b}$$

Pierwsza grupa zawiera 9 wyrazów, z których największy równa się 1, a więc wartość tej grupy nie przekracza 9. Druga grupa zawiera 90 wyrazów, z których największy równa się $1/10^r$, a więc wartość grupy nie przekracza $90/10^r = 9 \cdot (10/10^r)$. Trzecia grupa zawiera 900 wyrazów, z których największy równa się $1/100^r$, a więc wartość grupy nie przekracza $900/100^r = 9\cdot(100/100^r) = 9\cdot(10/10^r)^2$ i tak dalej. Ostatecznie otrzymujemy ograniczenie

$$s_n < 9\left[1 + \frac{10}{10^r} + \left(\frac{10}{10^r}\right)^2 + \dots\right] \to \frac{9}{1 - 10/10^r} \tag{24c}$$

gdyż w nawiasach kwadratowych mamy szereg geometryczny o ilorazie $10/10^r$. Iloraz ten jest mniejszy od 1 dla $r > 1$. Widzimy, że dla $r > 1$ ciąg sum częściowych czeregu (23) jest ograniczony, a ponieważ jest rosnący (wyrazy są nieujemne), musi być zbieżny. A zatem także i szereg (23) jest zbieżny.

Dla $0 \leqslant r \leqslant 1$ szereg (23) jest rozbieżny.

Szeregi znakozmienne

Jeżeli wyrazu szeregu są znakozmienne, to znaczy po każdym wyrazie dodatnim następuje wyraz ujemny, a po każdym ujemnym dodatni, na ogół *poprawia* to zbieżność. Mówi o tym **Kryterium Leibniza:** Jeżeli (i) $\lim\limits_{n\to\infty} =$ 0, (ii) $a_n > 0$, (iii) ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący (co najwyżej z pominięciem kilku wyrazów początkowych), to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, a_n \tag{25}$$

jest zbieżny.

Przykład 10

Szereg anharmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \tag{26}$$

jest zbieżny, choć szereg harmoniczny (15) jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna

Jeżeli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{27a}$$

jest zbieżny, szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{27b}$$

także jest zbieżny. Szereg (27b) nazywamy wówczas szeregiem *zbieżnym bezwzględnie*.

Jeżeli szereg (27b) jest zbieżny, ale szereg (27a) jest rozbieżny, szereg (27b) nazywamy *względnie zbieżnym*.

Przykład 11

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \tag{28}$$

jest zbieżny, ale szereg wartości bezwzględnych poszczególnych wyrazów, czyli szereg (15), jest rozbieżny. Szereg (28) jest zatem zbieżny względnie, ale **nie jest** zbieżny bezwzględnie.

Mnożenie szeregów

Uwaga: W tym punkcie zmieniamy numerację szeregów, numerując je od zera!

Dane są ciągi $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Tworzymy ciąg o wyrazach

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \cdots + a_0 b_n \tag{29}$$

— suma indeksów poszczególnych składników jest równa n.

Jeżeli szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne **bezwzględnie**, wówczas także szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ jest zbieżny, przy czym

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tag{30}$$

Szeregi potęgowe

Dany jest ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ oraz liczba $x \in \mathbb{R}$. Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \tag{31}$$

nazywam szeregiem potęgowym. Jeżeli szereg ten jest zbieżny, jego sumę mogę potraktować jako funkcję zmiennej x.

Przykład — szereg Taylora jest szeregiem potęgowym.

Pytanie: Kiedy szereg (31) jest zbieżny?

Promień zbieżności

Promieniem zbieżności szeregu potęgowego (31) nazywam taką liczbę $R \geqslant 0$, że szerego jest zbieżny dla $x\ :\ |x|<R$. Szereg potęgowy jest rozbieżny dla $|x|>R$, natomiast dla $x=R$ lub $x=-R$ szereg może być zbieżny lub rozbieżny.

Jeżeli dla danego szeregu potęgowego istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g \tag{32}$$

to promień zbieżności szeregu potęgowego wynosi $R = 1/g$; jeżeli $g = 0$, to $R = +\infty$, a jeśli $g = +\infty$, to $R = 0$. Jest to wniosek z kryterium d'Alemberta.

Jeżeli dla danego szeregu potęgowego istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g \tag{33}$$

to promień zbieżności szeregu potęgowego wynosi $R = 1/g$; jeżeli $g = 0$, to $R = +\infty$, a jeśli $g = +\infty$, to $R = 0$. Jest to wniosek z kryterium Cauchy'ego.

Przykład 12

Znajdź promień zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{34}$$

Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \tag{35}$$

a więc promień zbieżności szeregu (34) wynosi $+\infty$. Innymi słowy, szereg (34) jest zbieżny dla każdego x.

Sumę szeregu (34) oznaczam

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{36}$$

Wyrażenie (36) jest najbardziej poprawną i jednoznaczną definicją funkcji e^x ☺

Przykład 13

Zbadajmy promień zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \tag{37}$$

W tym przypadku mamy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \tag{38}$$

czyli $R = 1$.

Przykład 14

Zbadajmy teraz promień zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \tag{39}$$

Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \right) = 1 \tag{40}$$

Różniczkowanie wyraz po wyrazie

Rozpatrzmy nieco bardziej ogólną postać szeregu potęgowego:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n \tag{41}$$

Jest on zbieżny dla $|x-b| < R$. Wówczas szereg utworzony z pochodnych poszczególnych wyrazów

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (x-b)^{n-1} \tag{42}$$

ma taki sam promień zbieżności, R oraz dla $|x-b| < R$ zachodzi $g(x) = f'(x)$. Na brzegu $|x-b| = R$ może zachodzić jedna z trzech sytuacji: (i) oba szeregi są zbieżne, (ii) oba szeregi są rozbieżne, (iii) szereg $f(x)$ jest zbieżny, ale szereg pochodnych jest rozbieżny.