Fizyka dla firm — Matematyka

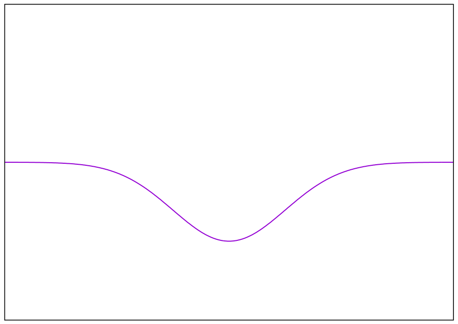
20. Minima i maksima

P. F. Góra
http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

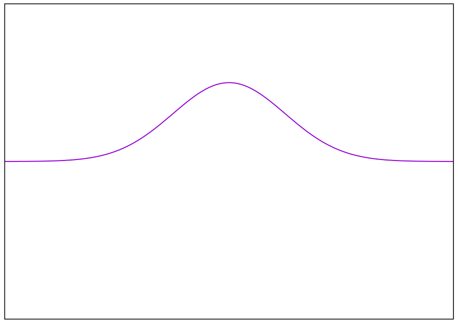
14 stycznia 2021

Ekstrema funkcji

Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma *minimum* w punkcie x_0, jeżeli jest w tym punkcie ciągła i istnieje takie otoczenie U punktu x_0, że $\forall x \in U : f(x) > f(x_0)$.



Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma *maksimum* w punkcie x_0, jeżeli jest w tym punkcie ciągła i istnieje takie otoczenie U punktu x_0, że $\forall x \in U : f(x) < f(x_0)$.



Minima i maksima nazywamy łącznie *ekstremami* funkcji.

Ekstrema a znak pochodnej

W otoczeniu maksimum funkcja zmienia charakter swojego wzrostu: na lewo od maksimum funkcja rośnie, na prawo maleje. Jeśli funkcja jest różniczkowalna, oznacza to, że na lewo od maksimum pochodna jest dodatnia, na prawo — ujemna. Podobnie dzieje się w otoczeniu minimum: Jeśli funkcja jest różniczkowalna, na lewo od maksimum pochodna jest ujemna, na prawo — dodatnia. Widzimy, że w otoczeniu ekstremum pochodna funkcji różniczkowalnej zmienia znak.

Jest to możliwe, gdy zachodzi jedna z dwu sytuacji:

- Pochodna w ekstremum ma wartość zero, lub
- pochodna jest nieokreślona (nieciągła) w ekstremum — klasycznym przykładem jest funkcja $y = |x|$.

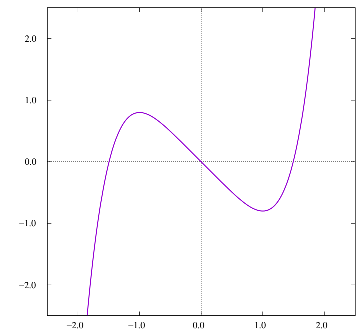
Płynie stąd następujący wniosek:

W celu znalezienia ekstremów — minimów i maksimów — funkcji, znajdujemy jej funkcję pochodną i znajdujemy punkty, w których funkcja jest ciągła, ale jej pochodna jest nieokreślona lub nieciągła, lub też — częściej — szukamy **miejsc zerowych pochodnej**.

Przykład 1

$$g(x) = \frac{1}{5}x^5 - x \tag{1a}$$

$$g'(x) = x^4 - 1 \tag{1b}$$



$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$. Funkcja może mieć ekstrema tylko w tych dwu punktach. Zauważmy, że $g'(x) > 0$ gdy $|x| > 1$, czyli gdy $x < -1$ lub $x > 1$. Gdy $-1 < x < 1$, $g'(x) < 0$. Rozpatrując zmianę znaku pochodnej — lub też zmianę monotoniczności funkcji — widzimy, że w punkcie $x = -1$ funkcja ma maksimum, a w punkcie $x = 1$ minimum.

Ekstrema a druga pochodna

Rozważmy funkcję $y = x^2$. Ma ona minimum w punkcie $x{=}0$, a jej *druga* pochodna w tym punkcie wynosi $y'' = 2 > 0$.

Z kolei funkcja $z = -x^2$ ma maksimum w punkcie $x{=}0$, a jej *druga* pochodna w tym punkcie wynosi $z'' = -2 < 0$.

Podobnie w przykładzie ze strony 5: Funkcja $g(x)$ ma maksimum w punkcie $x = -1$, a jej *druga* pochodna w tym punkcie wynosi $g''(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4 < 0$. Podobnie, w punkcie $x{=}1$ funkcja $g(x)$ ma minimum, a jej druga pochodna wynosi $g''(1) = 4 \cdot 1^3 = 4 > 0$.

Niech funkcja $f(x)$ ma ekstremum w punkcie x_0. Skorzystajmy z rozwinięcia Taylora, zakładając, że funkcja jest dostatecznie wiele razy różniczkowalna w otoczeniu x_0. Ponieważ w x_0 znajduje się ekstremum, $f'(x_0) = 0$, a zatem rozwinięcie Taylora do najniższego nieznikającego rzędu ma postać

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots \qquad |x - x_0| \ll 1 \tag{2}$$

W otoczeniu ekstremum funkcja zachowuje się jak parabola.

- Jeżeli $f'(x_0) = 0$, a $f''(x_0) > 0$, funkcja ma minimum.
- Jeżeli $f'(x_0) = 0$, a $f''(x_0) < 0$, funkcja ma maksimum.

Gdy druga pochodna znika

Może się zdarzyć, że w pewnym punkcie znika i pierwsza, i druga pochodna. Wówczas o zachowaniu funckji w otoczeniu miejsca zerowego pierwszej pochodnej decyduje najniższy nieznikający rząd rozwinięcia Taylora.

Jeżeli $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, ale $f^{(3)}(x_0) \neq 0$,

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \qquad |x - x_0| \ll 1 \tag{3}$$

i funkcja *nie ma* w punkcie x_0 ekstremum, gdyż niezależnie od znaku $f^{(3)}(x_0)$, po jednej stronie będą wartości mniejsze, niż $f(x_0)$, po drugiej zaś większe.

Jeżeli $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f^{(3)}(x_0) = 0$, ale $f^{(4)}(x_0) \neq 0$

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4 + \dots \qquad |x - x_0| \ll 1 \tag{4}$$

i funkcja *ma* w punkcie x_0 ekstremum. Jest to minimum, gdy $f^{(4)}(x_0) > 0$ lub maksimum, gdy $f^{(4)}(x_0) < 0$.

Wynik ten łatwo można uogólnić na przypadek, gdy pierwsza nieznikająca pochodna jest wyższego rzędu: Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i najniższa pochodna nieznikająca w x_0 jest rzędu nieparzystego, nie ma w tym punkcie ekstremum. wyższego rzędu: Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i najniższa pochodna nieznikająca w x_0 jest rzędu parzystego, w tym punkcie jest ekstremum. Charakter ekstremum jest określoby przez znak najniższej nieznikającej pochodnej. Jeżeli znak jest dodatni, jest minimum, jeżeli znak jest ujemny, mamy maksimum. Proszę sobie to porównać z funkcjami $y = x^3$, $y = x^4$.

Punkt przegięcia

Jak pamiętamy, druga pochodna określa wypukłość wykresu funkcji: Jeśli $f''(x) < 0$, wykres jest skierowany wypukłością do góry, jeśli $f''(x) > 0$, wykres jest skierowany wypukłością w dół. Zatem w punkcie, w którym druga pochodna znika

$$f''(x) = 0 \tag{5}$$

wypukłość wykresu zmienia się. Punkt taki nazywamy *punktem przegięcia*.

Zauważmy, że w ekstremach funkcji jej pochodna znika. Jeśli druga pochodna (pochodna pochodnej) funkcji jest ciągła na odcinku zawierającym dwa sąsiednie ekstrema, to na mocy twierdzenia Rolle'a musi istnieć punkt leżący pomiędzy ekstremami, w którym druga pochodna znika. Jeśli druga pochodna jest ciągła, pomiędzy sąsiednimi ekstremami musi znajdować się punkt przegięcia.

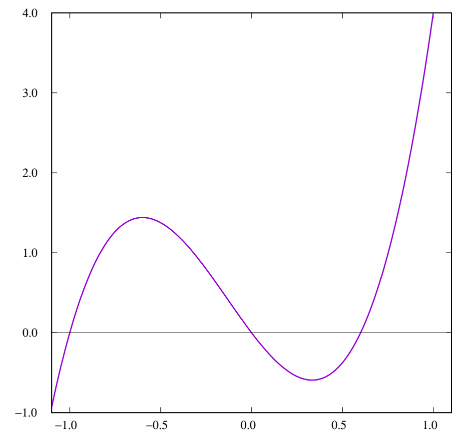
Przykład 2

Funkcja $y = x^3$, której druga pochodna wynosi $y'' = 6x$, ma punkt przegięcia w $x = 0$.

Przykład 3

$$y = 5x^3 + 2x^2 - 3x \tag{6a}$$
$$y' = 15x^2 + 4x - 3 \tag{6b}$$
$$y'' = 30x + 4 \tag{6c}$$

Funkcja ma punkt przegięcia gdy $30x + 4 = 0$, czyli w punkcie $x = -\frac{2}{15}$.



Asymptota funkcji

Jeśli funkcja jest ciągła przy $x \to \infty$ i jeśli istnieje prosta $y = mx + b$ taka, że

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0\,, \tag{7}$$

to prostą tę nazywamy asymptotą funkcji. Jeśli $m = 0$, asymptotę nazywamy poziomą, jeśli $m \neq 0$, asymptotę nazywamy ukośną.

Współczynniki asymptoty wyznaczamy z granic

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{8a}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) \tag{8b}$$

jeśli granice te istnieją.

Analogicznie definiujemy asymptotę przy $x \to -\infty$.

Przykład 4

Wyznaczmy asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 1} \tag{9}$$

Obliczam

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 1} &= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} \right) \\
&= -1 && \text{(10a)} \\
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 1} - (-x) \right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2 && \text{(10b)}
\end{aligned}$$

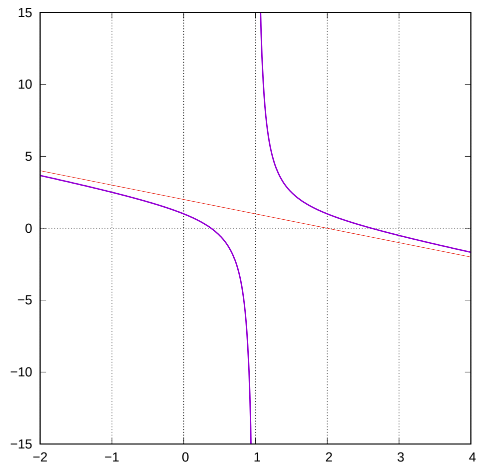
a więc prosta $y = -x + 2$ jest asymptotą ukośną funkcji (9) przy $x \to \infty$. Jak łatwo sprawdzić, ta sama prosta jest asymptotą ukośną tej funkcji przy $x \to -\infty$.

Przy okazji, punkt $x=1$ nie należy do dziedziny funkcji (9), a przy tym

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2+3x-1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \tag{11a}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-x^2+3x-1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \tag{11b}$$

Prosta $x = 1$ jest asymptotą pionową funkcji (9).



Badanie przebiegu zmienności funkcji

Badanie przebiegu zmienności funkcji obejmuje:

- Określenie dziedziny funkcji; jeżeli funkcja ma osobliwość usuwalną i można ją “uciąglić”, tak jak $\frac{\sin x}{x}$ w $x=0$, należy to zrobić
- Jeżeli funkcja jest okresowa, należy to podać, podając jej okres
- Jeżeli funkcja jest parzysta ($f(-x) = f(x)$) lub nieparzysta ($f(-x) = -f(x)$), należy to stwierdzić
- Zalezienie granic (lub granic jednostronnych) funkcji na krańcach dziedziny, tak jak $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- Znalezienie funkcji pochodnej
- Znalezienie miejsc zerowych funkcji pochodnej i sprawdzenie, czy odpowiadają one ekstremom funkcji, a jeśli tak, to czy są to minima, czy maksima; należy także podać wartość funkcji w ekstremach

- Podanie przedziałów monotoniczności funkcji
- Znalezienie punktów przegięcia funkcji; z tego punktu można niekiedy zrezygnować, jeśli jest to obliczeniowo uciążliwe
- Znalezienie asymptot ukośnych, jeżeli występują
- Opcjonalnie, naszkicowanie wykresu funkcji
- Niekiedy zaleca się także znalezienie miejsc zerowych funkcji — można od tego odstąpić, gdyż dodanie do funkcji stałej zmienia położenie miejsc zerowych, nie zmieniając innych charakterystyk wykresu funkcji ☺

Przykład 5

Znajdź ekstrema funkcji

$$f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}\cos x \tag{12}$$

Jest to funkcja okresowa, o okresie 2π, parzysta. Szukamy miejsc zerowych pochodnej:

$$\begin{aligned} f'(x) = -2\sin(2x) + \frac{1}{2}\sin x &= 0 && \text{(13a)}\\ -4\sin x\cos x + \frac{1}{2}\sin x &= 0 && \text{(13b)}\\ \sin x\left(\cos x - \frac{1}{8}\right) &= 0 && \text{(13c)} \end{aligned}$$

Wynika stąd, że albo $\sin x = 0$, czyli $x = k\pi$, albo też $x = \arccos\frac{1}{8} + 2k\pi$, $x = -\arccos\frac{1}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $\arccos\frac{1}{8} \simeq 1.4455$.

W celu ustalenia co jest minimum, co maksimum, badamy znak drugiej pochodnej:

$$f''(x) = -4\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(x) \tag{14}$$

Zauważmy, że

$$\cos\left(\pm\text{arc}\cos\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} \tag{15a}$$

$$\cos\left(\pm 2\,\text{arc}\cos\frac{1}{8}\right) = \cos\left(2\,\text{arc}\cos\frac{1}{8}\right) = 2\left(\cos\left(\text{arc}\cos\frac{1}{8}\right)\right)^2 - 1$$

$$= 2\left(\frac{1}{8}\right)^2 - 1 = -\frac{31}{32} \tag{15b}$$

Wobec tego

$$f''(k\pi) = -4\cos(2k\pi) + \frac{1}{2}\cos(k\pi) = -4 \pm \frac{1}{2} < 0 \tag{16a}$$

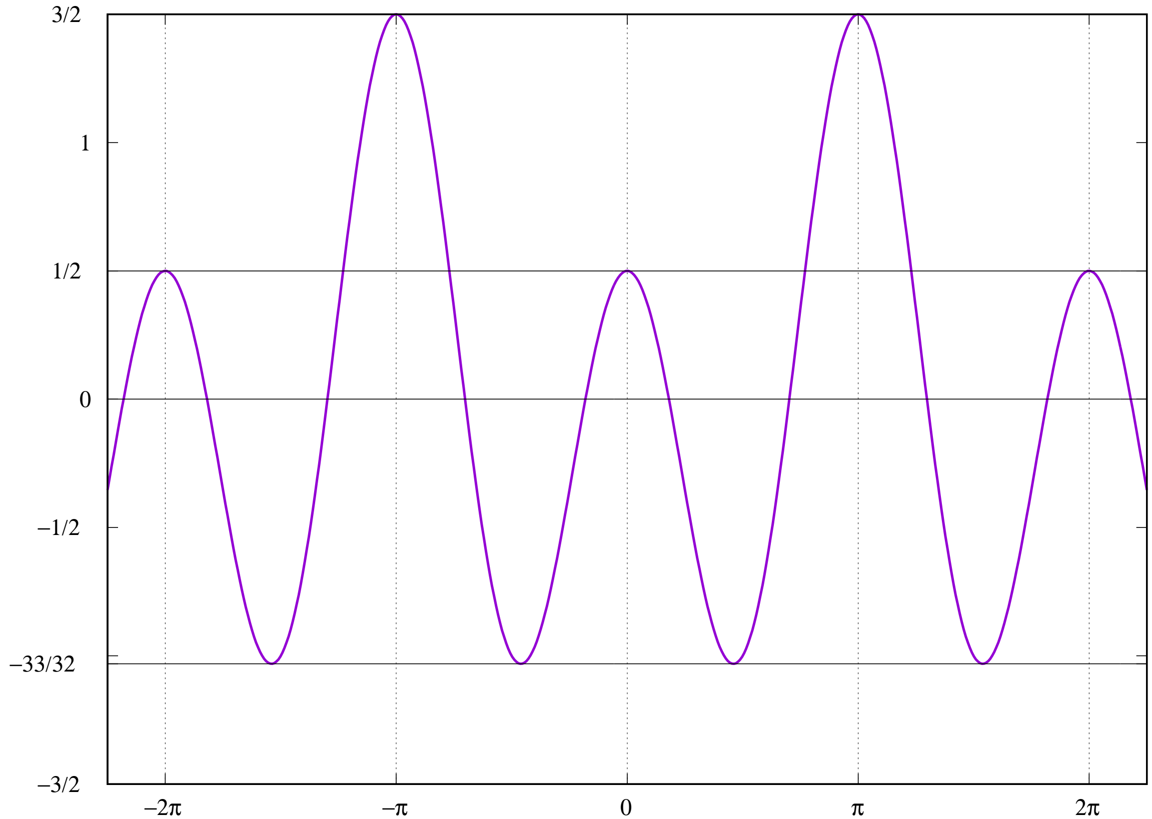
$$f''\left(\pm\text{arc}\cos\frac{1}{8}\right) = -4\cdot\left(-\frac{31}{32}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{63}{16} > 0 \tag{16b}$$

A zatem funkcja osiąga minima w punktach $\pm\text{arc}\cos\frac{1}{8} + 2k\pi$ i maksima w punktach $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$f_{\text{min}} = f\left(\pm\text{arc}\cos\frac{1}{8}\right) = -\frac{31}{32} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} = -\frac{33}{32} \tag{17a}$$

$$\begin{aligned} f_{\text{max}_1} &= f((2k+1)\pi) = \cos((4k+2)\pi) - \frac{1}{2}\cos((2k+1)\pi) \\ &= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{17b}$$

$$f_{\text{max}_2} = f(2k\pi) = \cos(4k\pi) - \frac{1}{2}\cos(2k\pi) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{17c}$$



3/2
1
1/2
0
−1/2
−33/32
−3/2
−2π
−π
0
π
2π

Przykład 6

Zbadajmy przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{8}x \tag{18}$$

Dziedziną tej funkcji jest cały zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{R}$. Granice funkcji w $\pm\infty$ wynoszą

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{8}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^4\left(\frac{1}{4} - \frac{9}{16x^2} + \frac{1}{8x^3}\right)\right) = +\infty \tag{19}$$

Funkcja ta może mieć ekstrema w punktach, w których znika jej pochodna:

$$f'(x) = x^3 - \frac{9}{8}x + \frac{1}{8} = 0\,. \tag{20}$$

Łatwo widzimy, że $x = 1$ jest pierwiastkiem tego równania. Dzieląc wielomian $x^3 - \frac{9}{8}x + 1$ przez $x-1$ otrzymujemy

$$x^3 - \frac{9}{8}x + 1 = (x-1)\left(x^2 + x - \frac{1}{8}\right) = 0 \tag{21}$$

a więc pozostałe dwa miejsca zerowe pierwszej pochodnej są równe $\frac{1}{4}(-2 \pm \sqrt{6})$. Potencjalne ekstrema funkcji (18) odpowiadają miejscom zerowym jej pochodnej.

Aby ustalić, czy są to minima, czy maksima, sprawdźmy drugą pochodną:

$$f''(x) = 3x^2 - \frac{9}{8} \tag{22a}$$

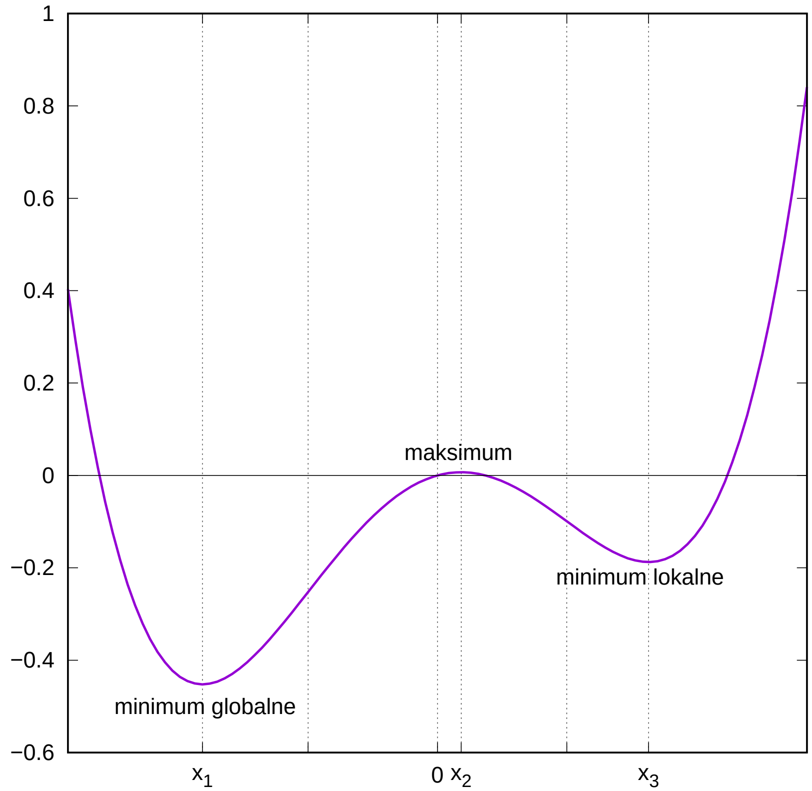
$$
\begin{aligned}
f''\left(\frac{-2-\sqrt{6}}{4}\right) &= \frac{3}{4}(1+\sqrt{6}) > 0 && \text{(22b)}\\
f''\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{4}\right) &= \frac{3}{4}(1-\sqrt{6}) < 0 && \text{(22c)}\\
f''(1) &= \frac{15}{8} > 0 && \text{(22d)}
\end{aligned}
$$

Konkludując, funkcja (18) ma następujące ekstrema:

- minimum w punkcie $x_1 = \frac{1}{4}(-2-\sqrt{6})$, równe $-\frac{3}{256}(8\sqrt{6}+19)$
- maksimum w punkcie $x_2 = \frac{1}{4}(-2+\sqrt{6})$, równe $\frac{3}{256}(8\sqrt{6}-19)$
- minimum w punkcie $x_3 = 1$, równe $-\frac{3}{16}$

Funkcja maleje od $-\infty$ do x_1, rośnie od x_1 do x_2, maleje od x_2 do x_3 i rośnie od x_3 do $+\infty$.

Możemy wreszcie wyznaczyć punkty przegięcia: Z warunku zerowania się drugiej pochodnej (22a) widzimy, że punktami przegięcia są $\pm\frac{1}{4}\sqrt{6}$.



Wykres funkcji $\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{8}x$

Minima lokalne, minima globalne

Minimum, jakie funkcja (18) osiąga w punkcie x_3, nazywam minimum lokalnym: jest to minimum, ale funkcja gdzieś poza otoczeniem tego minimum przybiera wartości mniejsze, niż wartość w tym minimum. Dana funkcja może mieć wiele minimów lokalnych.

Minimum, jakie funkcja (18) osiąga w punkcie x_1, nazywam minimum globalnym: jest to minimum i funkcja nigdzie nie osiąga wartości mniejszych, niż wartość w tym minimum. **Uwaga:** Minimum globalne nie musi istnieć (na przykład gdy funkcja ucieka do $-\infty$ gdzieś poza obszarem zawierającym minima lokalne)!

Analogicznie wprowadza się pojęcia maksimum lokalnego i maksimum globalnego.

Przykład 7

Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$w(x) = \frac{x^3 + 2}{2x} \tag{23}$$

Dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}/\{0\}$. Granice wynoszą

$$\lim_{x\to\pm\infty} w(x) = +\infty \tag{24a}$$
$$\lim_{x\to 0^-} w(x) = -\infty \tag{24b}$$
$$\lim_{x\to 0^+} w(x) = +\infty \tag{24c}$$

Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową badanej funkcji.

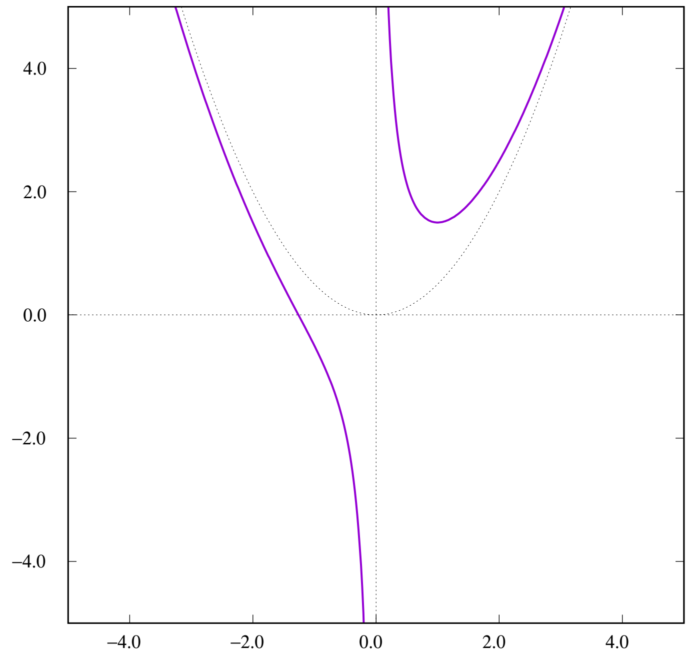
$$w'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 + 2) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2} \tag{25}$$

Pochodna jest nieokreślona w $x{=}0$, poza tym $w'(x) < 0$ dla $x < 1, x \neq 0$ i $w'(x) > 0$ dla $x > 1$. $w'(1) = 0$ i jest to jedyne miejsce zerowe pochodnej.

$$w''(x) = 1 + \frac{2}{x^3} \,. \tag{26}$$

Druga pochodna jest nieokreślona w $x{=}0$, a jej miejscem zerowym jest $x = -\sqrt[3]{2}$. $w''(1) = 3 > 0$.

Funkcja maleje od $-\infty$ do 0^- i od 0^+ do 1, rośnie od 1 do $+\infty$. Funkcja osiąga minimum dla $x{=}1$, a wartość minimum wynosi $g_{\text{min}} = \frac{3}{2}$. Jest to minimum lokalne, a funkcja nie posiada minimum globalnego. Nie ma asymptot poziomych ani ukośnych. Jedyny punkt przegięcia leży w punkcie $x = -\sqrt[3]{2}$.



Wykres funkcji $w(x) = \frac{x^3+2}{2x} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$. Dla $x \to \pm\infty$ wykres asymptotycznie zbliża się do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$.

Przykład 8

Zbadajmy przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x} \tag{27}$$

Funkcja ta jest nieokreślona w punktach, w których nie jest określony $\operatorname{tg} x$, czyli dla $x=\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Natomiast

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 1 \tag{28}$$

wobec czego funkcję (27) można “uciąglić”, przyjmując $f(0) = 1$. Ostatecznie dziedziną funkcji jest zbiór $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Funkcja jest parzysta. Granice w $\pm\infty$ nie istnieją. Natomiast dla $k \geqslant 0$,

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = +\infty \tag{29a}$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = -\infty \tag{29b}$$

Z parzystości funkcji (27) wynika, że jej wykres po stronie ujemnych argumentów jest lustrzanym odbiciem wykresu po stronie dodatniej, a więc dla $k > 0$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}-k\pi)^+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = +\infty \tag{29c}$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}-k\pi)^-} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = -\infty \tag{29d}$$

Proste $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ są asymptotami pionowymi.

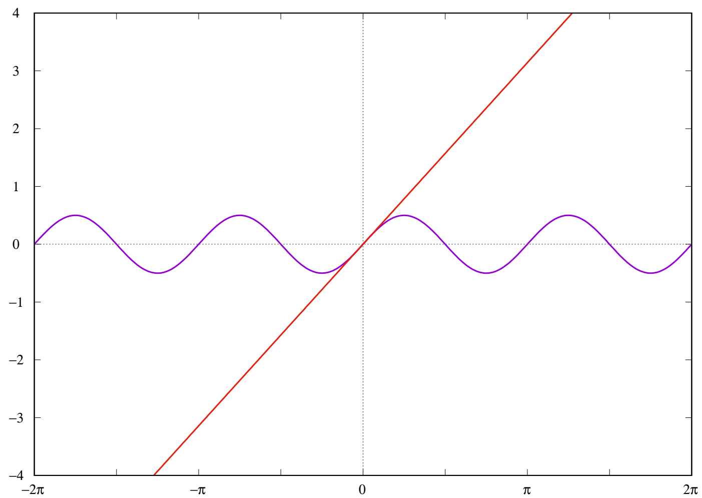
Obliczmy pochodną funkcji (27).

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)' = \left(\frac{\sin x}{x\cos x}\right)' = \frac{(\cos x)\cdot x\cos x - \sin x \cdot (\cos x - x\sin x)}{x^2\cos^2 x}$$
$$= \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} \tag{30}$$

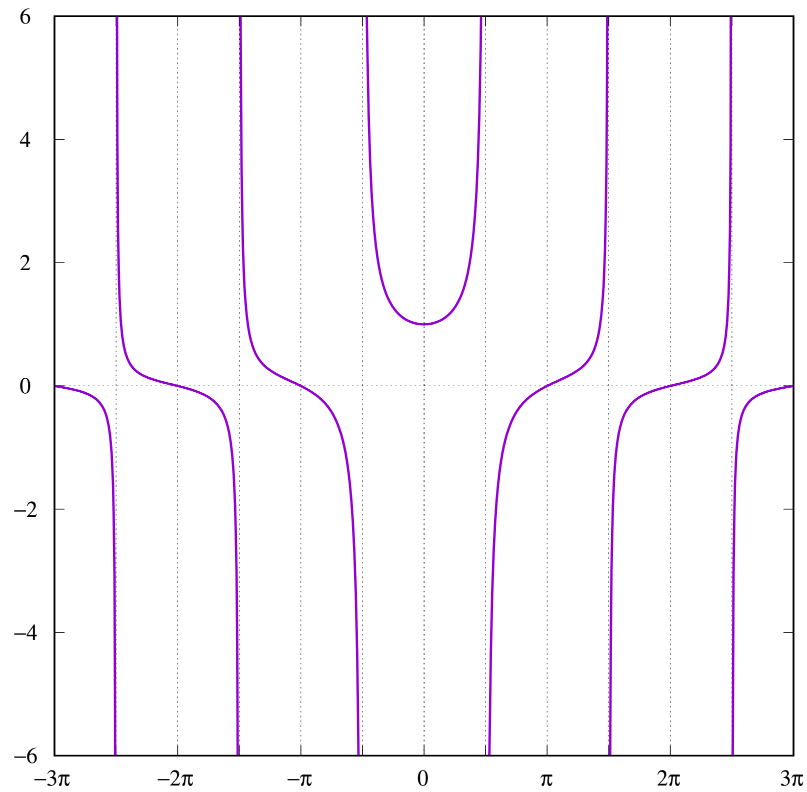
Dla $x{=}0$ otrzymujemy symbol nieoznaczony, musimy więc obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} = \underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\right)}_{=1}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$
$$= \left(\lim_{x\to 0}\sin x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right) = 0 \tag{31}$$

“Uciąglając” pochodną w zerze, możemy stwierdzić, że $f'(0) = 0$.



O znaku pochodnej (30) decyduje znak licznika. Jest on ujemny dla $x < 0$ i dodatni dla $x > 0$. Widzimy, że funkcja (27) jest przedziałami malejąca dla $x < 0$ i przedziałami rosnąca dla $x > 0$. W $x{=}0$ funkcja osiąga minimum, którego wartość wynosi 1. Nie szukamy punktów przegięcia z uwagi na skomplikowaną postać drugiej pochodnej.



Wykres funkcji $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$