Fizyka dla firm — Matematyka

19. Przykłady użycia pochodnych

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

7 stycznia 2021

W tym wykładzie będziemy obliczać pochodne funkcji. Część przykładów dotyczyć będzie obliczania granic, w których pojawiają się symbole nieoznaczone, często rozwiązywane za pomocą reguły de l'Hospitala, a więc z użyciem pochodnych.

Przykład 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)'}{(\sin x)'} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2 \tag{1}$$

Przykład 2

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} = 0 \tag{2}$$

Przykład 3

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-3x} = 0\cdot\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty} \\ = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{9e^{3x}} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie dwukrotnie zastosowaliśmy regułę de l'Hospitala.

Przykład 4

W nawiązaniu do poprzedniego przykładu, widzimy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego $a > 0$, w wyniku n-krotnego zastosowania reguły de l'Hospitala

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-ax} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{a^n\, e^{ax}} = 0 \tag{4}$$

Przykład 5

$$
\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sin^2 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cdot 2x}{2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2}
$$

$$
= \frac{1}{4} \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{\cos 2x}\right)}_{\text{wyr. skończone}=1} \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 2x}\right) = \frac{1}{4}\cdot 1\cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}}\right)
$$

$$
= \frac{1}{4}\cdot \frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}} = \frac{1}{4} \tag{5}
$$

Przykład 6

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x = 0 \cdot \infty = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin x}{\cos x} = \dots \tag{6a}$$

Podstawmy $x - \pi/2 = t$. Wówczas $x = t + \pi/2$, $\sin(t + \pi/2) = \cos t$, $\cos(t + \pi/2) = -\sin t$.

$$\dots = \lim_{t\to 0} \frac{t \cos t}{-\sin t} = -\left(\lim_{t\to 0} \cos t\right) \cdot \left(\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t}\right) = -1 \tag{6b}$$

Przykład 7

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$$
$$=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x}=0 \qquad (7)$$

Przykład 8

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 0^0 = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\ln x^x\right) = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(x \ln x\right) \tag{8a}$$

Obliczmy

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \tag{8b}$$

Wobec tego

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(x \ln x\right) = 1 \tag{8c}$$

Przykład 9

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \infty^0 = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\ln x^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) \tag{9a}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{9b}$$

Wobec tego

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) = e^0 = 1 \tag{9c}$$

Przykład 10

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \infty^0 = \lim_{x\to 0^+}\exp\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\exp\left(\sin x \ln\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\exp(-\sin x \ln x) = \lim_{x\to 0^+}\exp\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot(x\ln x)\right) = 1\,, \quad (10)$$

gdyż $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$, a jak pokazaliśmy w (8b), $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

Przykład 11

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\ln\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right) \tag{11a}$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right) = 1 \tag{11b}$$

$\ln 1 = 0$, więc pod eksponentą mamy symbol nieoznaczony typu $\frac{0}{0}$.

Obliczmy

$$\left(\frac{\sin x}{x\cos x}\right)' = \frac{\cos x(x\cos x) - \sin x(\cos x - x\sin x)}{x^2\cos^2 x}$$
$$= \frac{x\cos^2 x + x\sin^2 x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} \tag{11c}$$

$$\left(\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right)' = \frac{x\cos x}{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x\cos x}\right)'$$
$$= \frac{x\cos x}{\sin x}\cdot\frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} = \frac{x - \sin x\cos x}{x\sin x\cos x} \tag{11d}$$

Mamy zatem

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-\sin x\cos x}{x\sin x\cos x}}{1} \tag{11e}$$

i znowu otrzymujemy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x\cos x}{x\sin x\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x\cos x)'}{(x\sin x\cos x)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos x + x\cos^2 x - x\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{\sin x\cos x + x\cos^2 x - x\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin x\cos x}{2(\cos^2 x - \sin^2 x - 2x\sin x\cos x)} = 0
\end{aligned}
\tag{11f}
$$

i ostatecznie

$$
\lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{tg}\, x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right) = e^0 = 1 \tag{11g}
$$

Przykład 12

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right) \tag{12a}$$

gdzie postąpiliśmy podobnie, jak w poprzednim przykładzie.

Nadal korzystając z poprzedniego przykładu obliczamy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-\sin x\cos x}{x\sin x\cos x}}{2x} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\sin x\cos x} = \frac{0}{0} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{-x^2\sin^2 x + x^2\cos^2 x + 2x\sin x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x\cos x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{\sin x}(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\cos x} = \frac{1}{3} \qquad (12b)
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\sin x}{x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x\cos x}\right) \\
&= e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e} \qquad \text{(12c)}
\end{aligned}
$$

Przykład 13

Nadal korzystamy z obliczeń wykonanych w poprzednich przykładach.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^3}\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right) \tag{13a}$$

Postępujemy jak poprzednio i obliczamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\ln\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x\cos x}\right)'}{\left(x^3\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-\sin x\cos x}{x\sin x\cos x}}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x\cos x)'}{(x^3\sin x\cos x)'}$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(x(\cos^2 x-\sin^2 x)+3\sin x\cos x)}$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x(x(\cos^2 x-\sin^2 x)+3\sin x\cos x)}\right) = \dots \quad \text{(13b)}$$

Przekształcając to wyrażenie otrzymujemy

$$\cdots = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{x\left(\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}\underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\to 1} + \underbrace{3\cos x}_{\to 3}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{6x} \tag{13c}$$

Niestety, ta ostatnia granica *nie istnieje*. W konsekwencji, nie istnieje też granica (13a).

Istnieją jednak granice jednostronne:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{6x} = -\infty \tag{13d}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{6x} = \infty \tag{13e}$$

a zatem

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{6x}\right) = 0 \tag{13f}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{6x}\right) = \infty \tag{13g}$$

Przykład 14

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \tag{14a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1 \tag{14b}$$

Ostatecznie

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{14c}$$

(14c) to ważna granica, pojawiająca się w wielu obliczeniach.

Przykład 15

$$\lim_{x\to 4}(x-3)^{\frac{6}{4-x}} = \lim_{x\to 4}(1+x-4)^{\frac{-6}{x-4}} = \lim_{x\to 4}\left((1+x-4)^{\frac{1}{x-4}}\right)^{-6}$$
$$= \lim_{u\to 0}\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{-6} = \left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{-6} = e^{-6} \qquad (15)$$

gdzie podstawiliśmy $x-4=u$ i skorzystaliśmy z (14c).

Pewne zastosowanie wzoru Taylora

Rozwinięcie Taylora pozwala nam badać zachowanie funkcji $f(x+\varepsilon)$ dla $|\varepsilon| \ll 1$. Często zachodzi jednak konieczność badania zachowania $1/f(x+\varepsilon)$. Korzystając z rozwinięcia Taylora do drugiego rzędu mamy

$$\frac{1}{f(x+\varepsilon)} \simeq \frac{1}{f(x)} + \left.\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{f(x+\varepsilon)}\right|_{\varepsilon=0}\varepsilon + \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\frac{1}{f(x+\varepsilon)}\right|_{\varepsilon=0}\varepsilon^2 \tag{16a}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{f(x+\varepsilon)} = -\frac{f'(x+\varepsilon)}{(f(x+\varepsilon))^2} \tag{16b}$$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\varepsilon}\frac{f'(x+\varepsilon)}{(f(x+\varepsilon))^2} &= -\frac{f''(x+\varepsilon)(f(x+\varepsilon))^2 - 2(f'(x+\varepsilon))^2 f(x+\varepsilon)}{(f(x+\varepsilon))^4} \\ &= \frac{2(f'(x+\varepsilon))^2 - f''(x+\varepsilon)f(x+\varepsilon)}{(f(x+\varepsilon))^3} \end{aligned} \tag{16c}$$

$$\frac{1}{f(x+\varepsilon)} \simeq \frac{1}{f(x)} - \frac{f'(x)}{(f(x))^2}\varepsilon + \frac{1}{2}\cdot\frac{2(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f(x))^3}\varepsilon^2 \tag{16d}$$

Przykład 16

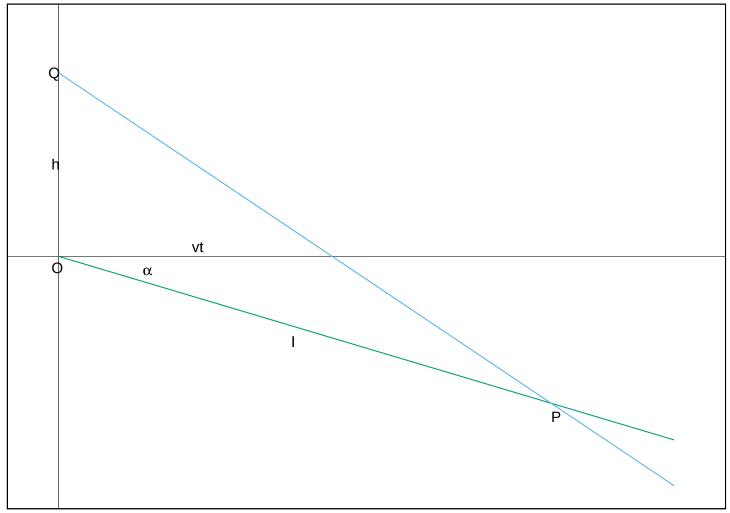
$$\frac{1}{x+\varepsilon} \simeq \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon}{x^2} + \frac{\varepsilon^2}{x^3} \tag{17}$$

Przykład 17

$$\frac{1}{\sqrt{x+\varepsilon}} \simeq \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\varepsilon}{2x\sqrt{x}} + \frac{3\varepsilon^2}{8x^2\sqrt{x}} \tag{18}$$

Przykład 18

Pewna prosta p nachylona jest pod kątem $-\alpha$ do osi OX płaskiego układu współrzędnych kartezjańskich. Z początku układu współrzędnych wyrusza punkt materialny, poruszający się ze stałą prędkością v wzdłuż osi OX. Płaszczyzna oświetlona jest lampą zamocowaną w punkcie o współrzędnych $(0, h)$. Znaleźć prędkość i przyspieszenie cienia punktu materialnego na prostej p.



W chwili t poruszający się punkt ma współrzędne $(vt, 0)$. Prosta OP ma równanie

$$y = -(\mathrm{tg}\,\alpha)x\,, \tag{19a}$$

gdyż przechodzi przez początek układu współrzędnych, a jej współczynnik kierunkowy wynosi $\mathrm{tg}\,(-\alpha)$. Natomiast prosta QP ma równanie

$$y = -\frac{h}{vt}x + h\,, \tag{19b}$$

gdyż przechodzi przez punkty $(0, h)$, $(vt, 0)$. Punkt przecięcia tych prostych wyznaczamy z warunku

$$-(\mathrm{tg}\,\alpha)x = -\frac{h}{vt}x + h\,, \tag{19c}$$

a ponieważ $x = l\cos\alpha$, ostatecznie

$$l = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{hvt}{h - vt\mathrm{tg}\,\alpha}\,. \tag{19d}$$

Zauważmy, że odległość l (19d) staje się w pewnym momencie nieskończona! Dlaczego? Prosta QP początkowo (w chwili $t = 0$) tworzy kąt $-\pi$ z osią OY. Kąt ten z czasem rośnie, aż do w końcu proste QP, OP staną się równoległe. Stanie się to wtedy, gdy współczynniki kierunkowe tych prostych zrównają się, czyli w chwili t_{max}, którą można wyliczyć z równania

$$- \frac{h}{vt_{\text{max}}} = -\mathrm{tg}\,\alpha\,. \tag{19e}$$

Odpowiada ona osobliwości (19d).

Różniczkując wyrażenie (19d) po czasie, znajdujemy poszukiwane wyrażenia na prędkość i przyspieszenie “cienia” poruszającego się punktu:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{hv}{\cos\alpha}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{v - vt\mathrm{tg}\,\alpha}\right) = \\ &= \frac{hv}{\cos\alpha}\cdot\frac{h - vt\mathrm{tg}\,\alpha - t(-v\mathrm{tg}\,\alpha)}{(h - vt\mathrm{tg}\,\alpha)^2}\frac{h^2v}{\cos\alpha(h - vt\mathrm{tg}\,\alpha)^2}\,, \qquad (19f) \\ \frac{d^2l}{dt^2} &= \frac{2h^2v^2\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha(h - vt\mathrm{tg}\,\alpha)^3}\,. \qquad (19g) \end{aligned}$$