Fizyka dla firm — Matematyka

18. Pochodna funkcji

P. F. Góra
http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

21 grudnia 2020

Pochodna funkcji w punkcie

Pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 nazywam granicę ilorazu różnicowego

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

jeśli granica ta istnieje. Podobnie jak w wypadku granic jednostronnych lub pojęcia jednostronnej ciągłości, można też definiować pochodne lewo- i prawostronne; granica w (1) jest brana wówczas, odpowiednio, jako $\lim\limits_{h \to 0^-}$ lub $\lim\limits_{h \to 0^+}$.

Geometryczny sens pochodnej

Rozpatrzmy *sieczną* wykresu funkcji przechodzącą przez punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x_0+h, f(x_0+h))$. Sieczna ma ogólne równanie

$$y = ax + b \tag{2a}$$

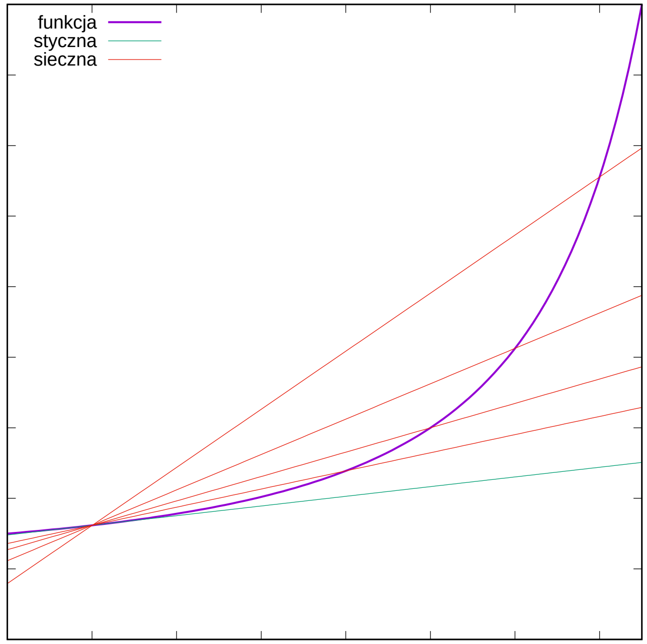
a ponieważ musi przechodzić przez wskazane punkty, musi spełniać

$$\begin{aligned} f(x_0) &= ax_0 + b && \text{(2b)} \\ f(x_0+h) &= a(x_0+h) + b && \text{(2c)} \end{aligned}$$

skąd łatwo wyliczamy

$$a = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \quad b = \frac{f(x_0)(x_0+h) - f(x_0+h)x_0}{h} \tag{2d}$$

Gdy $h \to 0$, sieczna zmierza do *stycznej* do wykresu funkcji w punkcie x_0, skąd wnosimy, że pochodna funkcji w punkcie jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie.



Funkcja, styczna do wykresu funkcji w pewnym punkcie i kilka siecznych przechodzących przez ten punkt

Pochodna a zachowanie funkcji

Pochodna w punkcie x_0 opisuje lokalne zachowanie funkcji w otoczeniu tego punktu w przybliżeniu liniowym:

$$f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + h \cdot f'(x_0)\,, \quad |h| \ll 1 \tag{3}$$

Jeżeli $f'(x_0) > 0$, funkcja jest rosnąca w otoczeniu punktu x_0.
Jeżeli $f'(x_0) < 0$, funkcja jest malejąca w otoczeniu punktu x_0.

Ciągłość a różniczkowalność

Twierdzenie: Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.

Dowód. Zacznijmy od tożsamości:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{4a}$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{4b}$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0}\left(f(x_0) + h\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) \tag{4c}$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + \lim_{h\to 0}\left(h\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) \tag{4d}$$

Ponieważ ostatnia granica jest granicą z iloczynu funkcji, *których obie granice istnieją*, mamy

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} h\right)}_{0} \cdot \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)}_{f'(x_0)} \quad \text{(4e)}$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \quad \text{(4f)}$$

To ostatnie stwierdzenie oznacza, że

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{(4g)}$$

□

Równość (4e) zachodzi, gdyż $f'(x_0)$ istnieje i jest skończona. Funkcja różniczkowalna jest ciągła. Innymi słowy, ciągłość jest warunkiem koniecznym różniczkowalności. Funkcje nieciągłe są nieróżniczkowalne w punktach nieciągłości.

Funkcja pochodna

Dana jest pewna funkcja $f(x)$. Funkcję, która argumentowi x przypisuje wartość pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie x, nazywam **funkcją pochodną** (lub w skrócie, pochodną) funkcji $f(x)$ i oznaczam $f'(x)$.

Pochodna funkcji w punkcie to liczba. Funkcja pochodna to funkcja, która argumentowi przypisuje wartość pochodnej pewnej funkcji w tym punkcie.

Funkcję pochodną funkcji $f(x)$ często oznacza się także jako $\dfrac{df}{dx}$. Wartość pochodnej w punkcie x_0 można wówczas oznaczyć przez $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Pochodne funkcji elementarnych

$$(\mathrm{const})' = 0 \tag{5}$$

$$(x^n)' = n\,x^{n-1} \tag{6}$$

$$(\sin x)' = \cos x \tag{7}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{8}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{9}$$

$$(e^x)' = e^x \tag{10}$$

Pochodna sumy:

$$(u+v)' = u' + v' \tag{11}$$

Pochodna iloczynu (reguła Newtona):

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \tag{12}$$

Pochodna ilorazu:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \tag{13}$$

Pochodna funkcji złożonej:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{14a}$$

gdzie pochodną f' oblicza się różniczkując po jej *formalnym* argumencie, jak w **przykładzie**:

$$\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \left.\frac{d \sin t}{dt}\right|_{t=x^2} \cdot \frac{d\, x^2}{dx} = 2x \cos\left(x^2\right) \tag{14b}$$

Ważne przykłady

Niech $a > 0$.

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln a}\right)^x\right)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = (\ln a)\, e^{x \ln a} = a^x \ln a \tag{15}$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a} \tag{16}$$

Inne przykłady

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2} \tag{17}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{18}$$

$$(\cos\omega x)' = (\omega x)'(-\sin\omega x) = -\omega\sin\omega x \tag{19}$$

$$(x\sin x)' = (x)'\sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cos x \tag{20}$$

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned} \tag{21}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{22}$$

Pochodna funkcji odwrotnej

Funkcja jest odwracalna jeśli jest ściśle monotoniczna, czyli ściśle rosnąca lub ściśle malejąca, wtedy bowiem stanowi relację wzajemnie jednoznaczną: jednemu argumentowi jest przyporządkowany tylko jeden wynik, a jeden wynik jest przyporządkowany tylko jednemu argumentowi.

Twierdzenie: Niech funkcja $f^{-1}(y)$ będzie funkcją odwrotną wobec funkcji $f(x)$, różniczkowalnej w punkcie x_0. Wówczas funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$, a jej pochodna wynosi

$$\left.\frac{df^{-1}}{dy}\right|_{y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{23}$$

Dowód. Dowód opiera się na obserwacji, że skoro f jest różniczkowalna, to jest ciągła, wobec czego funkcja odwrotna także jest ciągła, a zatem

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{24}$$

□

Przykłady

Obliczmy pochodne funkcji cyklometrycznych.

Funkcja $y = \arcsin x$ jest w przedziale $(-1, 1)$ odwrotna względem funkcji $x = \sin y$ dla $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Wobec tego

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{25}$$

gdyż we wskazanym przedziale $\cos y > 0$. Podobnie

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{26}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2} \tag{27}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2} \tag{28}$$

Pochodna logarytmiczna

Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna i nieujemna. Ile wynosi pochodna logarytmu tej funkcji? Skorzystamy z zasad różniczkowania funkcji złożonej.

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x) \tag{29}$$

Stąd

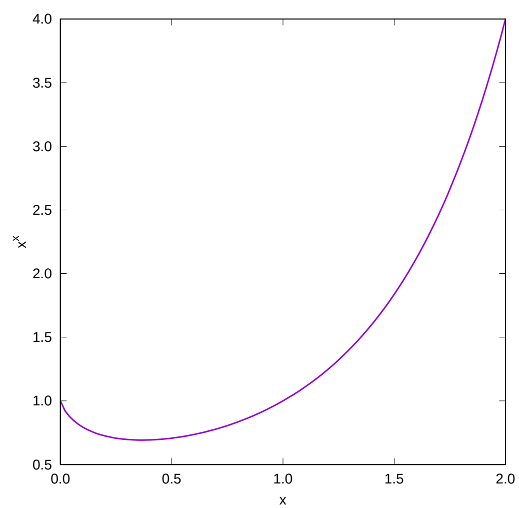
$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))' \tag{30}$$

Wzór (30) nazywa się niekiedy "wzorem na pochodną logarytmiczną". Jest on bardzo wygodny przy obliczaniu pochodnych niektórych funkcji.

Przykład

Niech $x > 0$. Obliczmy

$$\begin{aligned}(x^x)' &= x^x (\ln x^x)' = x^x (x \ln x)' \\ &= x^x \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = (1 + \ln x)x^x \end{aligned} \tag{31}$$



Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenie Lagrange'a: Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału, to istnieje wewnątrz tego przedziału punkt ξ taki, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{32}$$

Szczególnym przypadkiem twierdzenia Lagrange'a jest
Twierdzenie Rolle'a: Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału, a przy tym $f(a) = f(b)$, to istnieje wewnątrz tego przedziału punkt ξ taki, że $f'(\xi) = 0$.

Pochodne wyższych rzędów

Funkcja pochodna do danej funkcji sama jest funkcją, można więc wyznaczać *jej* pochodną (pochodną pochodnej) w punkcie, a także jej funkcję pochodną. Nazywa się ją drugą pochodną wyjściowej funkcji:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2} \tag{33}$$

Funkcję pochodną drugiej pochodnej nazywa się trzecią pochodną wyjściowej funkcji.

$$f^3(x) = \left(f''(x)\right)' = \frac{d^3 f}{dx^3} \tag{34}$$

I tak dalej ☺.

Mówimy, że funkcja jest klasy C_k w otoczeniu pewnego punktu x_0, jeżeli jest co najmniej k-krotnie róniczkowalna i jej pochodne aż do rzędu k są ciągłe.

Szereg Taylora

Twierdzenie: Niech funkcja $f(x)$ będzie różniczkowalna nieskończenie wiele razy (C_∞) w otoczeniu pewnego punktu x_0. Wówczas

$$f(x_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) h^n \tag{35}$$

gdzie $f^{(n)}(x_0)$ oznacza wartość n-tej pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie x_0; "zerową pochodną" interpretujemy jako wartość funkcji w tym punkcie. Szereg (35) nazywa się szeregiem Taylora.

Jeżeli rozwinięcia Taylora dokonamy wokół punktu $x_0 = 0$, możemy napisać

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \tag{36}$$

Szereg (36) nazywamy szeregiem Maclaurina.

Przykłady

1. Ponieważ $(e^x)' = e^x$, $(e^x)'' = e^x$, i ogólnie $(e^x)^{(n)} = e^x$ oraz $e^0 = 1$, jako szereg Maclaurina funkcji e^x otrzymujemy

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{37}$$

2. $(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos x)'' = -\cos x$ itd, w ogólności otrzymujemy

$$(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x \tag{38a}$$
$$(\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x \tag{38b}$$

oraz $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, otrzymujemy

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \tag{39}$$

3. Podobnie, $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$ itd, w ogólności otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
(\sin x)^{(2n)} &= (-1)^n \sin x &\quad (40a)\\
(\sin x)^{(2n+1)} &= (-1)^n \cos x &\quad (40b)
\end{aligned}
$$

więc po uwzględnieniu faktu, że $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, otrzymujemy

$$
\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \tag{41}
$$

Wzór de Moivre'a

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos x + i \sin x
\end{aligned} \tag{42}
$$

Przybliżenie wielomianem k-tego stopnia

Jeżeli szereg (35) obetniemy na k-tym wyrazie, otrzymamy wyrażenie przybliżone ($x = x_0 + h$)

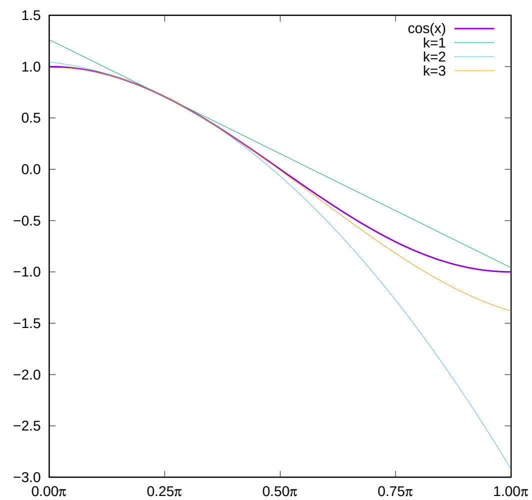
$$f(x) \simeq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \tag{43}$$

co jest *lokalnym* przybliżeniem zachowania funkcji przez wielomian stopnia k.

Przykład

Dokonajmy rozwinięcia funkci $\cos x$ wokół punktu $x_0 = \pi/4$ w szereg Taylora do trzeciego rzędu. $(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos x)'' = -\cos x$, $(\cos x)^{(3)} = \sin x$, $\cos \pi/4 = \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$. Zatem

$$\cos x \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2\sqrt{2}} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{6\sqrt{2}} \tag{44}$$



Przybliżenie drugiego rzędu

Jeżeli we wzorze (43) ograniczymy się do rzędu $k = 2$, otrzymamy

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 , \quad |x - x_0| \ll 1 \tag{45}$$

Jest to *lokalne* paraboliczne przybliżenie funkcji.

Jeżeli $f''(x_0) > 0$, ramiona paraboli skierowane są do góry i obszar pod wykresem funkcji jest wklęsły.
Jeżeli $f''(x_0) < 0$, ramiona paraboli skierowane są do dołu i obszar pod wykresem funkcji jest wypukły.

Jak widzimy, znak drugiej pochodnej określa lokalną krzywiznę funkcji. Punkt, w którym druga pochodna zmienia znak, nazywamy punktem przegięcia.

UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Najserdeczniejsze
życzenia
szczęśliwych
i radosnych
Świąt Bożego
Narodzenia
oraz wszelkiej
pomyślności
i sukcesów
w nadchodzącym
Nowym Roku.