Fizyka dla firm — Matematyka

17. Granica funkcji

Ciągłość

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

17 grudnia 2020

Granica funkcji

Pojęcie granicy funkcji jest centralne dla całej analizy matematycznej.

Mówimy, że funcja $f(x)$ ma granicę w punkcie x_0 i wynosi ona g, jeżeli

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon) \tag{1}$$

Piszemy wówczas

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \tag{2}$$

Kolejność kwantyfikatorów jest ważna! To jest “dobieranie delty do epislona” ☺, nie na odwrót. Gdy czytamy “dla każdego ε”, odruchowo myślimy o dużych wartościach. Tymczasem w pojęciu granicy chodzi o dowolnie *małe*, ale nieujemne wartości ε.

Granice niewłaściwe i w punktach niewłaściwych

Mówimy, że granicą funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 jest $+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, jeżeli

$$\forall A > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A) \tag{3}$$

Mówimy, że granicą funkcji $f(x)$ w nieskończoności jest liczba g, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x : (x > \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon) \tag{4}$$

W tym wypadku δ ma być duże ☺.

Podobnie definiujemy granice w minus nieskończoności, granice nieskończone w nieskończoności itd.

Przykłady

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x+3}=\frac{1+1}{1+3}=\frac{1}{2} \tag{5a}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{\infty+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}}=\infty \tag{5b}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{-\infty+\frac{1}{-\infty}}{1+\frac{3}{-\infty}}=-\infty \tag{5c}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0}=\infty \tag{5d}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\infty}=0 \tag{5e}$$

Granice jednostronne

Niech x_0 będzie jakąś liczbą i niech $f(x)$ będzie określona w pewnym prawostronnym otoczeniu tego punktu. Mówimy, że funkcja posiada granicę prawostronną w tym punkcie, równą g, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x : (x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon) \tag{6}$$

Zapisujemy ten fakt jako

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g \tag{7}$$

Zapis $x \to x_0^+$ rozumiemy jako "x dąży do x_0, ale jest stale większe od x_0".

Podobnie definiuje się granicę lewostronną (notacja: $x \to x_0^-$) oraz niewłaściwe granice jednostronne.

W ogólności granica funkcji w punkcie/w nieskończoności nie musi istnieć. Warunkiem koniecznym (i wystarczającym) istnienia granicy w punkcie skończonym jest to, aby obie granice jednostronne istniały i były sobie równa.

Przykład

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty\,. \tag{8}$$

Granica $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ *nie istnieje*.

Przykład

Rozpatrzmy funkcję schodkową Heaviside'a:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{9}$$

Zachodzi

$$\lim_{x\to 0^-} \theta(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \theta(x) = 1\,, \tag{10}$$

natomiast $\lim\limits_{x\to 0} \theta(x)$ nie istnieje.

Uwaga: Funkcja schodkowa (9) nie jest określona dla $x = 0$. Niekiedy przyjmuje się $\theta(0) = 1/2$, nie zmienia to jednak podanych wyżej własności granic.

Własności granic

Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ istnieją. Wówczas istnieją granice

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) + \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) \tag{11a}$$

i podobnie dla granic

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) \tag{11b}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \tag{11c}$$

i podobnie dla granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$. Należy jednak uważać na możliwość pojawienie się symboli nieoznaczonych!

Przykład

Granica

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) \tag{12a}$$

jest symbolem nieoznaczonym typu $\infty-\infty$. Możemy jednak to wyrażenie przekształcić:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0
\end{aligned} \tag{12b}$$

...ale

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}=\infty \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Twierdzenie o trzech funkcjach Jeżeli w pewnym otoczeniu punktu x_o zachodzi

$$f(x) < g(x) < h(x) \tag{14a}$$

i granice

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = G \tag{14b}$$

istnieją i są sobie równe, to granica

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = G \tag{14c}$$

Podobnie dla granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$.

Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest rosnąca i ograniczona od góry przy $x \to \infty$, to istnieje granica

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \tag{15}$$

i granica ta jest większa od wszystkich wartości, jakie przybiera funkcja dla $x \gg A > 0$. Podobnie dla funkcji malejącej i ograniczonej od dołu.

Przykład

Rozpatrzmy funkcję

$$r(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \tag{16}$$

Funkcja $r(x)$ jest ściśle rosnąca dla $x > 0$ i ograniczona od góry; ograniczeniem jest liczba 1, a funkcja *dla żadnej skończonej wartości argumentu* nie osiąga tej wartości. Wnioskiem z powyższego twierdzenia jest, że granica $\lim\limits_{x\to\infty} r(x)$ istnieje; nietrudno wykazać, że $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = 1$.

Reguła de l'Hospitala

Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ lub też $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{17}$$

gdzie f', g' oznaczają pochodne tych funkcji, pod warunkiem że granica po prawej stronie (17) istnieje. Podobnie — dla granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$.

Reguła de l'Hospitala pozwala rozwiązać problemy przy wyrażeniach nieoznaczonych typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞.

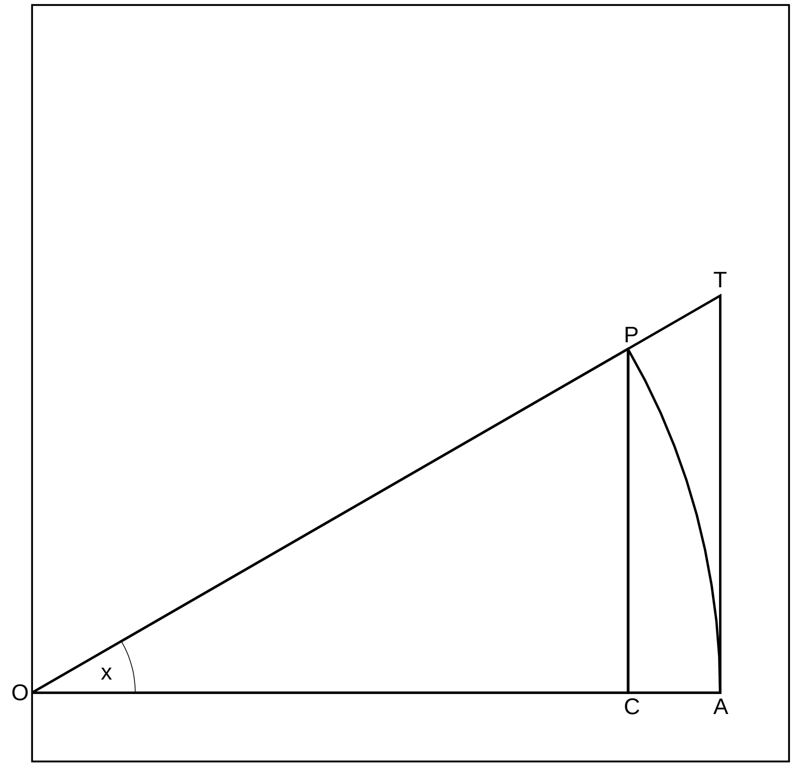
Granica $\frac{\sin x}{x}$

Rozpatrzmy granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \tag{18}$$

Gdybyśmy chcieli skorzystać z “ilorazu granic”, napotkamy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$. Musimy do tego podejść w inny sposób. Ponieważ funkcja jest parzysta, wystarczy przeanalizować przypadek $x > 0$. Rozpatrzmy rysunek (następna strona)

Pole trójkąta $\triangle OPA$ jest mniejsze od pola wycinka kołowego OPA, które jest mniejsze od pola trójkąta $\triangle OTA$. Wysokość $\triangle OPA$ wynosi $r \sin x$ a jego podstawa r, wysokość $\triangle OTA$ wynosi $r \operatorname{tg} x$, podstawa także r, zatem


T
P
x
O
C
A

$$0 < \frac{1}{2}r^2 \sin x < \frac{1}{2}r^2 x < \frac{1}{2}r^2 \operatorname{tg} x \tag{19a}$$

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x \tag{19b}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \tag{19c}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \tag{19d}$$

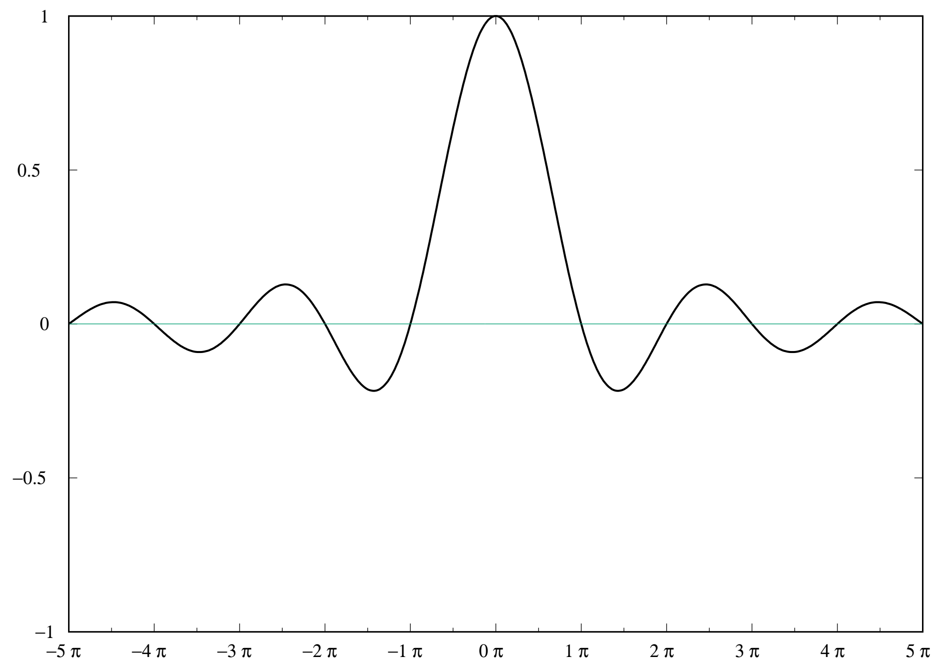
$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x \tag{19e}$$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \tag{19f}$$

Ponieważ $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2) < 2\sin(x/2) < 2 \cdot x/2 = x$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x \tag{19g}$$

Granica funkcji stałej 0 wynosi 0, granica funkcji x przy $x \to 0^+$ wynosi 0, więc granica wyrażenia $1 - \frac{\sin x}{x}$ też musi być 0, skąd wynika (18).



Funkcja $\frac{\sin x}{x}$

Inne ważne granice

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \tag{20}$$

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} P_1(x) = 0 \tag{21}$$

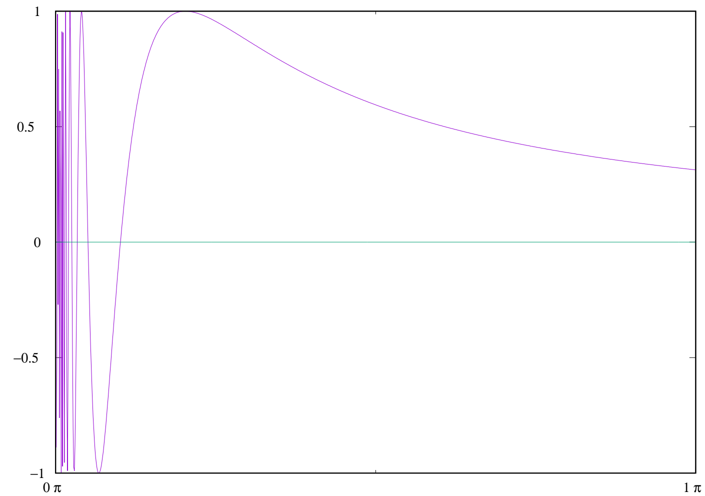
$$\lim_{x \to -\infty} e^{x} P_2(x) = 0 \tag{22}$$

gdzie $P_1(x), P_2(x)$ są *dowolnymi* wielomianami.

Granica

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \tag{23}$$

nie istnieje.



Ciągłość funkcji

Ciągłość jest jedną z najważniejszych cech, którą *mogą* posiadać funkcje. Mówimy, że funkcja rzeczywista zmiennej rzeczywistej $f(x)$ jest ciągła w punkcie c należącym do dziedziny tej funkcji, jeżeli

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \tag{24}$$

Alternatywnie,

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x : (|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon) \tag{25}$$

Definicje (24) i (25) są równoważne.

Pojęcie ciągłości można uogólnić na przypadek zespolony, na przypadki wielowymiarowe i na ogólne odwzorowania w przestrzeniach topologicznych.

Funkcja **nie jest** ciągła, w szczególności gdy

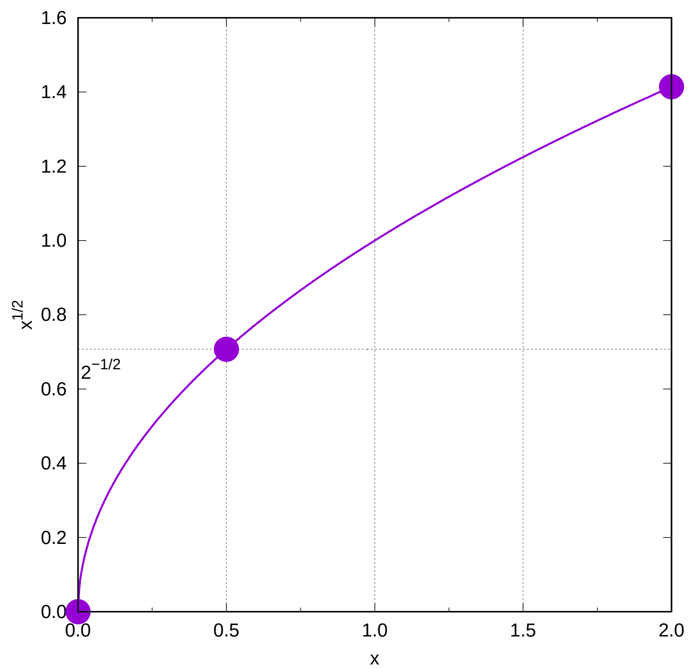
- punkt c nie należy do dziedziny
- granica w (24) nie istnieje, gdyż
  - funkcja wykonuje skok
  - funkcja jest osobliwa w otoczeniu punktu c
  - zachowanie funkcji w otoczeniu tego punktu jest niemożliwe do określenia

Mówiąc niezbyt precyzyjnie, dla funkcji jednej zmiennej *ciągłość* oznacza, że *można narysować wykres funkcji bez odrywania ołówka od papieru*.

Własności funkcji ciągłych

- Funkcja ciągła przeprowadza przedział domknięty na przedział domknięty, otwarty na otwarty.
- Jeżeli funkcja ciągła jest odwracalna, to jej funkcja odwrotna także jest ciągła.
- Jeżeli funkcje $f(x), g(x)$ są ciągłe w jakimś punkcie, to także funkcje $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $\text{const} \cdot f(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ oraz $f(x)/g(x)$ są ciągłe w tym punkcie; to ostatnie pod warunkiem, że $g(x) \neq 0$
- Jeżeli funkcje $f(x), g(x)$ są ciągłe, to funkcja złożona $f(g(x))$ jest ciągła (np. funkcja $\sin(x^2)$ jest ciągła).

Twierdzenie o wartości średniej: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, to istnieje $\tilde{x} \in [a, b] : f(\tilde{x}) = (f(a) + f(b))/2$.



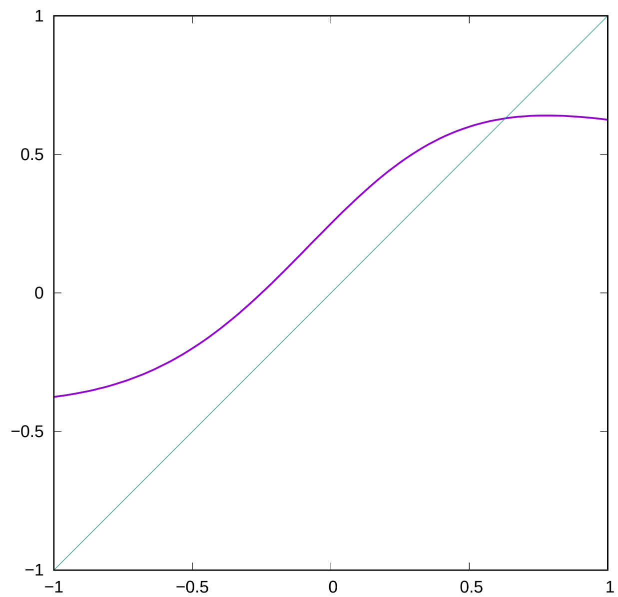
Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje $\tilde{x} \in [a, b] : f(\tilde{x}) = 0$.

Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, to osiąga swój kres górny i dolny na tym przedziale.

Można powiedzieć, że funkcje ciągłe na przedziale domkniętym zachowują się "porządnie": Przybierają wszystkie wartości z zakresu wyznaczonego przez zakres w punktach skrajnych. Mogą wychodzić poza ten zakres, ale nie są na tym przedziale rozbieżne ani nieokreślone.

Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym: Jeżeli funkcja ciągła przeprowadza pewien przedział domknięty w siebie, $f:[a,b] \to [a,b]$, to ma w tym przedziale punkt stały:

$$\exists \bar{x} \in [a,b] : f(\bar{x}) = \bar{x} \tag{26}$$



Wykres funkcji $(x + 1/4)/(x^2 + 1)$

“Uciąglanie” funkcji w punkcie

Niekiedy wzór (przepis na obliczanie) na funkcję nie pozwala wyliczyć jej wartości w pewnym punkcie. Jeśli jednak jednak istnieje granica funkcji w tym punkcie i jest skończona, możemy funkcję “uciąglić", przypisując jej w tym (pozornie) osobliwym punkcie wartość równą granicy.

Przykłady

$$w(x) = \frac{x^2}{x} \quad \longrightarrow \quad w(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{27a}$$

$$v(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \longrightarrow \quad v(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \tag{27b}$$

Przykład

Rozpatrzmy bardziej skomplikowany przykład. Dana jest funkcja

$$g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1} \tag{28}$$

Funkcja jest nieciągła w punkcie $x = 1$, gdyż otrzymujemy tam symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$. Rozpatrzmy granicę

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1} &= \lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi(y+1))}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi y+\pi)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi y)\cos\pi + \cos(\pi y)\sin\pi}{y} = -\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi y)}{y} \\
&= -\pi\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi y)}{\pi y} = -\pi\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = -\pi
\end{aligned} \tag{29}$$

gdyż ostatnia granica równa się 1. (Po drodze użyliśmy podstawień $y = x - 1$, $z = \pi y = \pi(x-1)$.)

Możemy więc zmodyfikować definicję funkcji (28):

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} & x \neq 1 \\ -\pi & x = 1 \end{cases} \tag{30}$$

Ta funkcja jest ciągła, a jej wykres przedstawia poniższy rysunek: