Fizyka dla firm — Matematyka

16. Krzywe stożkowe

P. F. Góra
http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

14 grudnia 2020

Równanie prostej na płaszczyźnie

Jak już wspominaliśmy, równanie prostej na płaszczyźnie ma ogólną postać

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

przy czym liczby A, B nie mogą *jednocześnie* być równe zeru. Równanie to nosi nazwę równania kierunkowego prostej. Wektor $[B, -A]$ jest równoległy do tej prostej i jest nazywany *wektorem kierunkowym prostej*. Wektor $[A, B]$ jest prostopadły do prostej.

Równanie prostej w przestrzeni

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ najwygodniej jest podać równanie prostej w postaci parametrycznej. Mianowicie, rozpatrujemy pewien wektor $\mathbf{v} \neq 0$, o składowych $[v_x, v_y, v_z]$. Wówczas równania

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + v_x t && \text{(2a)} \\
y &= y_0 + v_y t && \text{(2b)} \\
z &= z_0 + v_z t\,, && \text{(2c)}
\end{aligned}
$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$, opisują prostą przechodzącą przez punkt (x_0, y_0, z_0) i równoległą do wektora $\mathbf{v}$.

Równanie płaszczyzny

Ogólne równanie płaszczyzny ma postać

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

przy czym liczby A, B, C nie mogą być *jednocześnie* równe zeru.

Przyjmijmy, że żadna z liczb A, B, C, D nie jest równa zeru (przypadki szczególne można rozpatrzyć osobno). Wówczas łatwo sprawdzić, że punkty $P_1 = (-D/A, 0, 0)$, $P_2 = (0, -D/B, 0)$, $P_3 = (0, 0, -D/C)$. Naszym celem jest wyznaczenie wektora prostopadłego (normalnego) do płaszczyzny (3). Skoro wektor ma być prostopadły do płaszczyzny, musi być prostopadły do dowolnych wektorów leżących na płaszczyźnie. Weźmy wektory $\mathbf{u} = P_1\vec{P}_2 = [D/A, -D/B, 0]$ oraz $\mathbf{w} = P_1\vec{P}_3 = [D/A, 0, -D/C]$.

Oznaczmy poszukiwany wektor $\mathbf{n} = [p, q, r]$. Z warunków $\mathbf{n} \circ \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{n} \circ \mathbf{w} = 0$ otrzymujemy

$$\frac{D}{A}p - \frac{D}{B}q = 0 \tag{4a}$$
$$\frac{D}{A}p - \frac{D}{C}r = 0 \tag{4b}$$

Układ równań (4) nie ma jednoznacznego rozwiązania, ale natychmiast widać, że wektor $\mathbf{n} = [A, B, C]$ spełnia go, a zatem jest to wektor prostopadły do płaszczyzny (3).

Można to także rozwiązać w inny sposób. Wiemy, że iloczyn wektorowy jest prostopadły do obu swoich czynników. Możemy obliczyć

$$
\begin{aligned}
\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{D}{A} & -\frac{D}{B} & 0 \\ \frac{D}{A} & 0 & -\frac{D}{C} \end{vmatrix} = \frac{D^2}{BC}\mathbf{e}_1 + \frac{D^2}{AC}\mathbf{e}_2 + \frac{D^2}{AB}\mathbf{e}_3 \\
&= \begin{bmatrix} \frac{D^2}{BC} \\ \frac{D^2}{AC} \\ \frac{D^2}{AB} \end{bmatrix} = \frac{D^2}{ABC} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{5}
$$

a więc także otrzymujemy wektor proporcjonalny do $\mathbf{n} = [A, B, C]$ jako wektor prostopadły do płaszczyzny (3)

Inną wygodną formą równania płaszczyzny jest *równanie odcinkowe*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1\,. \tag{6}$$

Postać ta ma tę zaletę, że od razu widać, że punkty $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ należą do płaszczyzny zadanej przez równanie (6), co więcej, są to punkty, w których płaszczyzna przecina osie układu współrzędnych.

Przykład

Znajdź równanie płaszczyzny rozpiętej przez wektory swobodne $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$, $\mathbf{b} = [0, 2, 1]$ i zawierającej punkt $(0, 0, 1)$.

Ponieważ

$$\mathbf{n} = \text{const} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \text{const} \cdot [1, -1, 2] \tag{7a}$$

jest, jako iloczyn wektorowy $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{b}$, prostopadły do obu tych wektorów, musi być wektorem normalnym poszukiwanej płaszczyzny. Ma ona zatem równanie

$$x - y + 2z + D = 0 \tag{7b}$$

Pozostaje wyznaczyć współczynnik D. Ponieważ punkt $(0, 0, 1)$ ma spełniać równanie (7b), $D = -2$ i poszukiwane równanie płaszczyzny ma postać

$$x - y + 2z - 2 = 0 \tag{7c}$$

Powierzchnia stożkowa

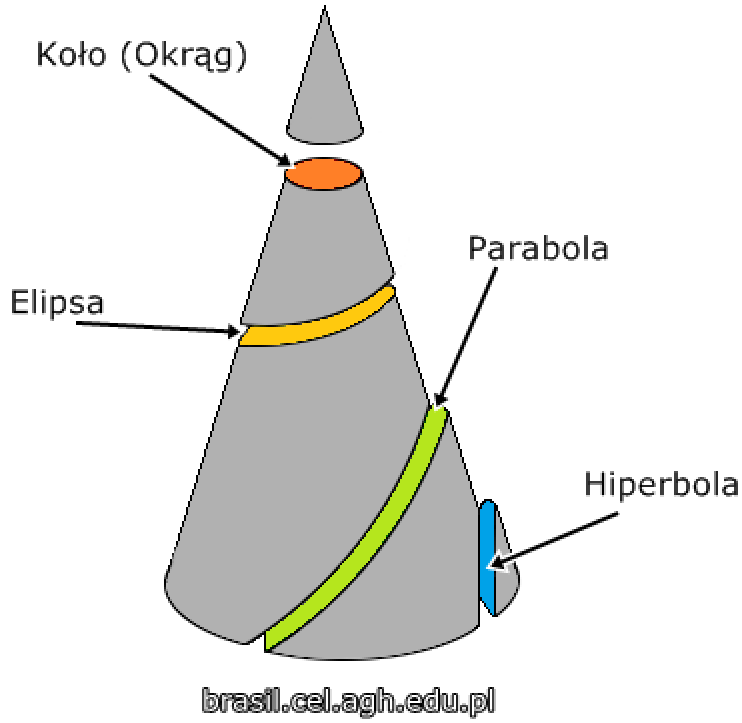
Wyobraźmy sobie dwie proste, przecinające się pod kątem α, $0<\alpha<\pi/2$. Jedna z tych prostych obraca się wokół drugiej o pełny kąt, zakreślając *powierzchnię stożkową*. Powierzchnia stożkowa jest nachylona do osi obrotu (osi symetrii) o kąt α (patrzymy się na kąt leżący wewnątrz powierzchni stożkowej).

Krzywe stożkowe

Jeśli powierzchnię stożkową przetniemy płaszczyzną, na przekroju otrzymamy *krzywe stożkowe*. Wynikiem przekroju może być:

- **okrąg**, jeśli płaszczyzna cięcia jest prostopadła do osi symetrii powierzchni stożkowej
- **elipsa**, jeśli płaszczyzna sięcia jest nachylona do osi symetrii powierzchni stożkowej pod kątem mniejszym, niż $\pi/2$, ale większym, niż α
- **parabola**, jeśli płaszczyzna cięcia jest nachylona pod kątem α
- **hiperbola**, jeśli płaszczyzna cięcia jest nachylona pod kątem mniejszym, niż α.

Innymi możliwymi przekrojami są punkt, prosta lub para prostych, które możemy traktować jako zdegenerowane przypadki, odpowiednio, elipsy bądź okręgu, paraboli i hiperboli.



Takie są historyczne, starożytne (!) definicje krzywych stożkowych. My jednak będziemy rozpatrywać krzywe stożkowe jako miejsca geometryczne punktów spełniających odpowiednie warunki na płaszczyźnie.

Równanie okręgu

Okrąg to miejsce geometryczne punktów równoodległych od pewnego punktu, zwanego środkiem okręgu. Z samej definicji odległości wynika równanie okręgu:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{8}$$

gdzie (x_0, y_0) oznaczają położenie środka okręgu, $r \geqslant 0$ jego promień.

Pole powierzchni okręgu wynosi $S = \pi r^2$, a długość okręgu $L = 2\pi r$.

Jeżeli środek okręgu pokrywa się ze środkiem układu współrzędnych ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$), równanie okręgu redukuje się do znanej postaci

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{9}$$

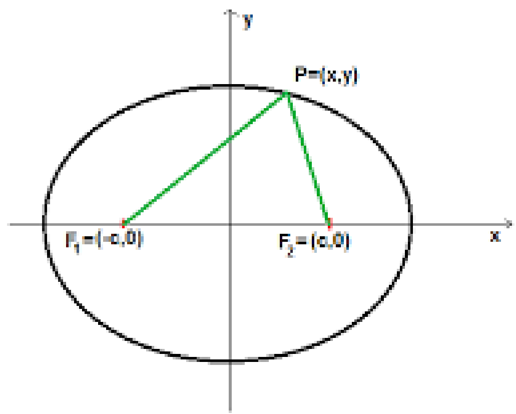
We współrzędnych biegunowych równanie okręgu w postaci (9) jest niezwykle proste: $r = \mathrm{const}$, natomiast równanie w postaci parametrycznej ma postać

$$x = r \cos t \tag{10a}$$

$$y = r \sin t \tag{10b}$$

Elipsa

Wszystkie punkty leżące na okręgu są równoodległe od jednego punktu: środka okręgu. Rozważmy teraz zbiór punktów, których suma odległości od dwóch wybranych punktów jest stała. Punkty te nazywamy *ogniskami*. Dobierzmy układ współrzędnych tak, aby interesujące nas punkty miały współrzędne $(-c, 0)$, $(c, 0)$. Niech suma odległości wynosi $2a$; z geometrii widać, że $a > c$.



Liczymy (poziome linie oddzielają poszczególne równania dla lepszej widoczności):

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \tag{11a}$$

$$\begin{aligned} x^2+2xc+c^2+y^2+x^2-2xc+c^2+y^2 \\ +2\sqrt{\left((x+c)^2+y^2\right)\left((x-c)^2+y^2\right)}=4a^2 \end{aligned} \tag{11b}$$

$$\sqrt{\left((x+c)^2+y^2\right)\left((x-c)^2+y^2\right)}=2a^2-(x^2+y^2+c^2) \tag{11c}$$

$$\begin{aligned} x^4+2x^2y^2+y^4-2c^2x^2+2c^2y^2+c^4 \\ =x^4+2x^2y^2+y^4 \\ +c^4-4c^2a^2+2c^2x^2+2c^2y^2+4a^4-4a^2x^2-4a^2y^2 \end{aligned} \tag{11d}$$

$$-4c^2x^2+4a^2x^2+4a^2y^2=4a^4-4a^2c^2 \tag{11e}$$

$$\frac{a^2 - c^2}{a^4 - a^2c^2}x^2 + \frac{a^2}{a^4 - a^2c^2}y^2 = 1 \tag{11f}$$

Oznaczając $a^2 - c^2 = b^2 > 0$, otrzymujemy równanie elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{12}$$

Dla $a^2 = b^2 = r^2$ równanie to redukuje się do równania okręgu.

Jeśli środkiem elipsy nie jest środek układu współrzędnych, tylko punkt (x_0, y_0), przy czym ogniska leżą na prostej równoległej do osi OX, to równanie (12) można łatwo uogólnić:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{13}$$

Mimośród

Widzimy, że $c^2 = a^2 - b^2$; $\pm c$ oznacza położenia ognisk elipsy na osi OX. Wielokość

$$e = \frac{c}{a} \tag{14}$$

nazywamy mimośrodem (ang. *eccenticity*) elipsy. Zachodzi $0 \leqslant e \leqslant 1$. Taka elipsa jest "szersza niż wyższa" ☺. Dla $e = 0$ elipsa staje się okręgiem. Dla $e \to 1$ elipsa nigdy się nie zamyka i dąży do paraboli.

Liczby a, b oznaczają, odpowiednio, większą i mniejszą półoś elipsy.

“Pochylona” elipsa

Jak wygląda równanie elipsy, której prosta łącząca ogniska — alternatywnie: której większa półoś — jest nachylona pod kątem θ do osi OX? Trzeba obrócić wszystkie punkty o kąt θ (co jest równoważne obrotowi układu współrzędnych o kąt $-\theta$). Ponieważ wiemy, jak wygląda macierz obrotu płaskiego, widzimy, że nowe współrzędne będą się równać

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{15}$$

My chcemy wyrazić stare współrzędne przez nowe. Ponieważ macierz obrotu jest ortogonalna, z łatwością znajdujemy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{16}$$

skąd $x = x' \cos\theta + y' \sin\theta$, $y = -x' \sin\theta + y' \cos\theta$. Podstawiamy te wyrażenia do równania (12) i znajdujemy

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) {x'}^2 + 2\sin\theta\cos\theta \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x'y' + \left(\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}\right) {y'}^2 = 1 \tag{17}$$

Zauważmy, że dla $\theta = \pi/2$ ($\sin\theta = 1$, $\cos\theta = 0$) równanie to przybiera postać

$$\frac{{x'}^2}{b^2} + \frac{{y'}^2}{a^2} = 1 \tag{18}$$

czyli większa i mniejsza półoś zamieniły się miejscami; elipsa jest teraz “wyższa niż szersza”, a ogniska leżą w punktach $(0, \pm c)$.

Gdyby środek elipsy był przesunięty, współrzędne środka także należałoby poddać obrotowi.

Inne postacie równania elipsy

Wracamy do kanonicznej postaci równania (12). Równanie w postaci parametrycznej przybiera postać

$$x = a \cos t \tag{19a}$$

$$y = b \sin t \tag{19b}$$

gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Z kolei w układzie biegunowym równanie elipsy ma postać

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} \tag{20}$$

Pole powierzchni elipsy wynosi $S = \pi ab$, natomiast długości obwodu elipsy nie da się wyrazić przez skończoną kombinację funkcji elementarnych.

Parabola

We współrzędnych kartezjańskich parabola o pionowej osi symetrii ma równanie

$$y = ax^2 + bx + c \tag{21a}$$

Analogicznie, parabola o poziomej osi symetrii ma równanie

$$x = ay^2 + by + c \tag{21b}$$

Parabole “pochylone” uzyskujemy dokonując obrotu okładu współrzędnych, jak w (16).

Zwróćmy uwagę, że w wyrażeniach (21) jedna zmienna jest w potędze pierwszej, druga zaś w drugiej (i pierwszej, ale to można by zlikwidować odpowiednio przesuwając układ współrzędnych).

Równania parametryczne paraboli mają postać (zmienną parametryczną jest t)

$$\begin{aligned} x &= 2pt + h && \text{(22a)} \\ y &= pt^2 + k && \text{(22b)} \end{aligned}$$

“Leżąca” parabola o równaniu $y^2 = 2px$ ma we współrzędnych biegunowych równanie

$$r = 2p\frac{\cos\phi}{\sin^2\phi}\,,\ \pi \in [-\pi/2, \pi/2] \tag{23}$$

Hiperbola

Hiperbola to zbiór punktów, dla których wartość bezwzględna różnicy odległości tych punktów od dwóch ustalonych punktów, nazywanych ogniskami hiperboli, jest stała. Jeśli układ współrzędnych wybierzemy w ten sposób, aby ogniska leżały w punktach $(-c, 0)$, $(c, 0)$, musi zachodzić

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \tag{24}$$

Wykonując obliczenia podobne, jak dla elipsy, uzyskujemy równanie hiperboli

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{25}$$

gdzie $b^2 = c^2 - a^2$.

Zwróćmy uwagę, że hiperbola, w przeciwieństwie do pozostałych krzywych stożkowych, ma *dwie* gałęzie. Dla $|x| \gg 1$, czyli dla bardzo dużych wartości $|x|$, hiperbola w postaci kanonicznej, danej przez (25), zbliża się do dwóch prostych, zwanych asymptotami hiperboli:

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{26}$$

Równanie parametryczne hiperboli ma postać

$$x = \pm a \cosh t \tag{27a}$$

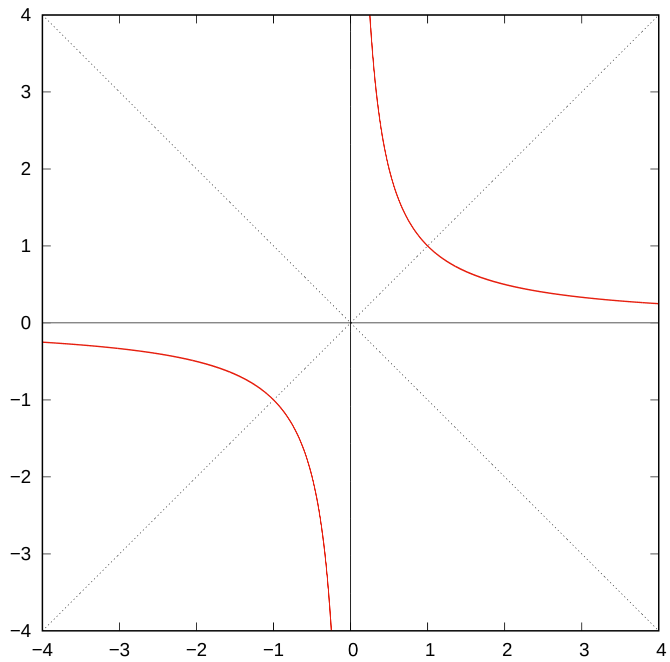
$$y = b \sinh t \tag{27b}$$

Wybór znaku odpowiada za wybór gałęzi hiperboli.

Dokonując obrotu, możemy z (25) uzyskać równanie “nachylonej” hiperboli. Podobnie jak poprzednio można też przesunąć hiperbolę tak, aby jej środek nie leżał w środku układu współrzędnych.

Wykres $1/x$

Podczas nauki matematyki studenci najczęściej mają do czynienia z hiperbolą będącą wykresem funkcji $y = 1/x$. Asymptotami są proste $y = 0$ oraz $x = 0$.



Chociaż kształt wykresu nie budzi wątpliwości, czy to na pewno jest hiperbola? Ponieważ $y = 1/x$ i $x \neq 0$, $xy = 1$. Obróćmy układ współrzędnych o kąt $\pi/4$, co odpowiada obrotowi wykresu o kąt $-\pi/4$.

$$x = (x' - y')/\sqrt{2} \tag{28a}$$

$$y = (x' + y')/\sqrt{2}, \tag{28b}$$

a więc

$$xy = 1 \Leftrightarrow \frac{{x'}^2}{2} - \frac{{y'}^2}{2} = 1, \tag{28c}$$

co odpowiada kanonicznej postaci hiperboli.