# Fizyka dla firm — Matematyka

## 15. Iloczyn wektorowy

## Niekartezjańskie układy współrzędnych

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

10 grudnia 2020

## Iloczyn wektorowy

Dla wektorów z przestrzeni $\mathbb{R}^3$ definiuje się iloczyn wektorowy $\mathbf{L} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, jako (pseudo)wektor o składowych:

$$L_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \,, \tag{1}$$

gdzie $\epsilon_{ijk}$ jest *tensorem zupełnie antysymetrycznym*, zwanym także *symbolem Levi-Civity*:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i,j,k \text{ tworzą parzystą permutację liczb 1,2,3} \\ -1 & \text{jeżeli } i,j,k \text{ tworzą nieparzystą permutację liczb 1,2,3} \\ 0 & \text{gdy którekolwiek wskaźniki powtarzają się} \end{cases} \tag{2}$$

Można to łatwo rozwinąć:

$$L_1 = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{1jk} a_j b_k = \sum_{j,k=2}^{3} \epsilon_{1jk} a_j b_k$$

gdyż gdyby $j = 1$ lub $k = 1$, symbol Levi-Civity $\epsilon_{1..} = 0$

$$\begin{aligned} &= \epsilon_{122} a_2 b_2 + \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 + \epsilon_{133} a_3 b_3 \\ &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \end{aligned} \tag{3a}$$

gdyż $\epsilon_{122} = \epsilon_{133} = 0$.

Podobnie

$$\begin{aligned} L_2 &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{2jk} a_j b_k = \sum_{j,k\in\{1,3\}} \epsilon_{2jk} a_j b_k \\ &= \epsilon_{211} a_1 b_1 + \epsilon_{231} a_3 b_1 + \epsilon_{213} a_1 b_3 + \epsilon_{233} a_3 b_3 \\ &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \end{aligned} \tag{3b}$$

$$
\begin{aligned}
L_3 &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{3jk} a_j b_k = \sum_{j,k=1}^{2} \epsilon_{3jk} a_j b_k \\
&= \epsilon_{311} a_1 b_1 + \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1 + \epsilon_{322} a_2 b_2 \\
&= a_1 b_2 - a_2 b_1 \qquad \text{(3c)}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{L} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = L_1 \mathrm{e}_1 + L_2 \mathrm{e}_2 + L_3 \mathrm{e}_3 = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}, \qquad \text{(3d)}
$$

gdzie $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ są kolejnymi wersorami osi układu współrzędnych.

Można to zapisać w postaci mniej “eleganckiej”, ale niekiedy bardziej użytecznej:

$$\mathbf{L} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{4}$$

## Przykład

Niech $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$, $\mathbf{b} = [0, 2, 1]$. Wówczas

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

## Własności iloczynu wektorowego

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \tag{6}$$

Widać to najłatwiej z wyrażenia (4): zamiana kolejności wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ odpowiada zamienieniu miejscami drugiego i trzeciego wiersza wyznacznika, a to powoduje zmianę znaku wyznacznika.

Iloczyn wektorowy jest prostopadły do tworzących go wektorów. Istotnie,

$$\mathbf{a} \circ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{3} a_i \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k = \sum_{k=1}^{3} b_k \left( \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i a_j \right) = 0\,, \tag{7}$$

co wynika z tego, że gdy rozpatrujemy podwójną sumę w nawiasie, przy każdej ustalonej wartości wskaźnika $k$ każdej kombinacji $ijk$ musi towarzyszyć kombinacja $jik$, przy której symbol Levi-Civity zmienia znak. To powoduje, że cała podwójna suma w nawiasie znika.

Podobnie dowodzimy, że $\mathbf{b} \circ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$. A zatem iloczyn wektorowy jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

## Wartość iloczynu wektorowego

Ponieważ długość wektora nie zależy od wyboru układu współrzędnych, wybierzmy taki, w którym będzie najprościej obliczyć, a przynajmniej zinterpretować, wartość (długość wektora) iloczynu wektorowego.

Jak widzieliśmy, iloczyn wektorowy jest prostopadły do płaszczyzny rozpinanej przez wektory go tworzące. Wybierzmy więc taki układ współrzędnych, w którym wektory te rozpinają płaszczyznę $XY$*. Ich składowe wynoszą w tym układzie współrzędnych $[a_1, a_2, 0]$, $[b_1, b_2, 0]$, zaś iloczyn

*Dwa wektory niewspółliniowe rozpinają płaszczyznę. Tę płaszczyznę, rozpinaną przez dane nam wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ uznajemy za płaszczyznę $XY$ układu współrzędnych.

wektorowy, zgodnie ze wzorem (4),

$$\mathbf{L} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{e}_3 \tag{8}$$

$$\|\mathbf{L}\| = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \tag{9}$$

a wektor $\mathbf{L}$ jest skierowany wzdłuż osi $OZ$, czyli jest prostopadły do płaszczyzny rozpinanej przez wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Niech te dwa wektory tworzą, odpowiednio, kąty $\alpha_1, \alpha_2$ z osią $OX$. Składowe wektorów są rzutami tych wektorów na osie układu współrzędnych, czyli

$$a_1 = \|\mathbf{a}\| \cos\alpha_1 \,, \quad a_2 = \|\mathbf{a}\| \sin\alpha_1 \,, \tag{10a}$$

$$b_1 = \|\mathbf{b}\| \cos\alpha_2 \,, \quad b_2 = \|\mathbf{b}\| \sin\alpha_2 \,, \tag{10b}$$

Podstawiamy (10) do (9), otrzymując

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}\| &= |(\|\mathbf{a}\| \cos\alpha_1)(\|\mathbf{b}\| \sin\alpha_2) - (\|\mathbf{a}\| \sin\alpha_1)(\|\mathbf{b}\| \cos\alpha_2)| \\ &= \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot |\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 \cos\alpha_2| \\ &= \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot |\sin(\alpha_1 - \alpha_2)| \end{aligned} \tag{11}$$

Miarą kąta między wektorami $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ w wybranym układzie współrzędnych jest $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$. Ponieważ jednak *kąt między wektorami nie zależy od wyboru układu współrzędnych*, jak widzimy, używana przez nas definicja iloczynu wektorowego jest zgodna z definicją "szkolną".

## Przykład

Ile wynosi kąt pomiędzy wektorami $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$, $\mathbf{b} = [0, 2, 1]$?

Wiemy już, że $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [1, -1, 2]$. Wobec tego $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{6}$. Jednocześnie $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{5}$. Wobec tego, zgodnie ze wzorem (11),

$$|\sin \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}} \tag{12a}$$

Nawiasem mówiąc, ten sam wniosek uzyskalibyśmy korzystając z iloczynu skalarnego:

$$\cos \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \sqrt{\frac{2}{5}} \tag{12b}$$

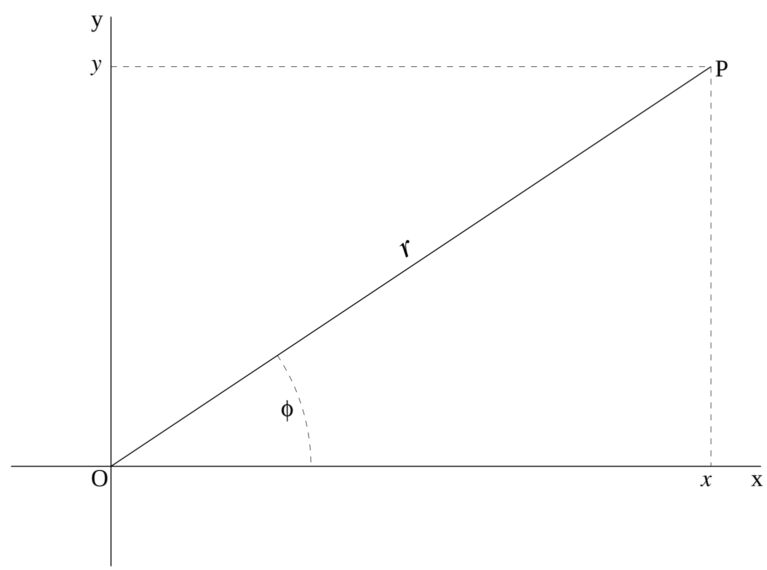
 

## Układ kartezjański płaski

Układ kartezjański na płaszczyźnie składa się z dwu osi, przecinających się w punkcie $O$ pod kątem prostym. Punkt $O$ nazywamy "początkiem" lub "środkiem" układu współrzędnych. Ustalamy, która oś jest "pierwsza", która "druga". Tradycyjnie oznaczamy je $OX$, $OY$. Każdy punkt płaszczyzny można jednoznacznie określić podając jego rzuty prostokątne na obie osie. Punkt, którego rzuty na obie osie wynoszą, odpowiednio, $x$, $y$, oznaczamy $P(x, y)$. Liczby $x, y$, nazywane współrzędnymi kartezjańskimi, mogą przyjmować wszystkie wartości rzeczywiste, $x, y \in \mathbb{R}$. Punkty płaszczyzny można zatem utożsamiać z uporządkowanymi parami liczb rzeczywistych.

Punkt płaszczyzny można także utożsamiać z wektorem zaczepionym w początku układu współrzędnych, zakończonym zaś w danym punkcie. Wektor ten nazywamy *wektorem wodzącym* punktu.

Osie układu kartezjańskiego dzielą płaszczyznę na cztery ćwiartki, numerowane od prawego górnego rogu przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.




Układ kartezjański płaski i układ biegunowy.

## Układ biegunowy

Alternatywą dla układu kartezjańskiego płaskiego jest układ biegunowy. Zamiast podawać współrzędne kartezjańskie, podajemy odległość punktu od środka układu współrzędnych, $r$ ($r \geqslant 0$), oraz kąt $\phi$, jaki wektor wodzący punktu tworzy z osią $OX$. Kąt mierzymy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Związek pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a biegunowymi tego samego punktu jest dany przez

$$x = r\cos\phi \tag{13a}$$

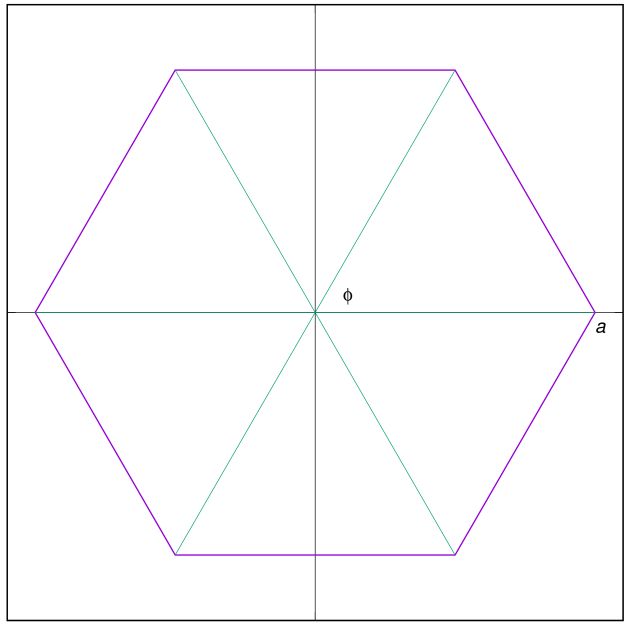
$$y = r\sin\phi \tag{13b}$$

## Przykład

W kartezjańskim układzie współrzędnych umieszczono sześciokąt foremny o boku $a$ w ten sposób, że środek układu współrzędnych jest środkiem sześciokąta, a jeden wierzchołek leży na dodatniej półosi osi $OX$. Jakie są współrzędne kartezjańskie i biegunowe wierzchołków sześciokąta?

Pierwszy wierzchołek leży na osi $OX$. Drugi wierzchołek tworzy z osią $OX$ kąt $\phi$. Z symetrii, trzeci wierzchołek tworzy kąt $2\phi$ i tak dalej. Mamy $6\phi = 2\pi$, czyli $\phi = \pi/3$. Zatem w sposób oczywisty współrzędne biegunowe wierzchołków sześciokąta wynoszą

$$\left(a, k\frac{\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\,. \tag{14}$$



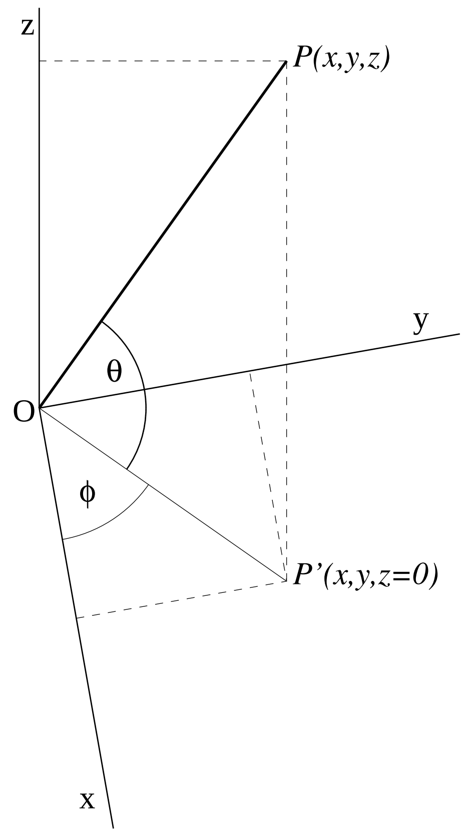

Współrzędne kartezjańskie wierzchołków wyliczamy według wzorów (13), podstawiając kolejno kąty (14). Otrzymujemy kolejno $(a, 0)$, $(a/2, a\sqrt{3}/2)$, $(-a/2, a\sqrt{3}/2)$, $(-a, 0)$, $(-a/2, -a\sqrt{3}/2)$, $(a/2, -a\sqrt{3}/2)$.

## Trójwymiarowy układ kartezjański

Układ kartezjański trójwymiarowy składa się z trzech wzajemnie prostopadłych osi, przecinających się w jednym punkcie, zwanym "początkiem" lub "środkiem" układu współrzędnych. Każdy punkt przestrzeni możemy jednoznacznie określić podając jego trzy rzuty prostokątne na kolejne osie. Jeżeli punkt ma współrzędne $P(x, y, z)$, jego rzut na płaszczyznę $XY$ ma współrzędne $(x, y, 0)$; można go wówczas utożsamiać z punktem płaszczyzny o współrzędnych $P'(x, y)$.

Wektor o początku w początku układu współrzędnych i końcu w danym punkcie nazywamy *wektorem wodzącym* punktu. Punkt można utożsamiać z jego wektorem wodzącym.




Układ kartezjański trójwymiarowy i układ sferyczny.

## Układ sferyczny

Alternatywą dla układu kartezjańskiego jest układ współrzędnych sferycznych. Położenie punktu określamy wówczas podając jego odległość od środka układu współrzędnych, $r$ ($r \geqslant 0$) oraz dwa kąty. W wyborze tych kątów jest pewna dowolność — my przyjmujemy, że są to $\theta$, kąt, jaki tworzy wektor wodzący punktu z płaszczyzną $XY$, mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, oraz $\phi$, kąt, jaki tworzy rzut wektora wodzącego punktu na płaszczyznę $XY$, z osią $OX$, mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. W tej konwencji związek pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi punktu dany jest przez

$$x = r \cos\theta \cos\phi \tag{15a}$$
$$y = r \cos\theta \sin\phi \tag{15b}$$
$$z = r \sin\theta \tag{15c}$$

**Układ walcowy** Inną alternatywą dla układu kartezjańskiego jest układ współrzędnych walcowych, zwany także układem cylindrycznym. Jest to, mówiąc obrazowo, uzupełnienie współrzędnych biegunowych o "wysokość" punktu ponad płaszczyznę $XY$, czyli o współrzędną $z$:

$$x = r\cos\phi \tag{16a}$$
$$y = r\sin\phi \tag{16b}$$
$$z = z \tag{16c}$$

Który układ współrzędnych przestrzennych — kartezjański, sferyczny czy walcowy — wybrać? Ten, w którym najwygodniej będzie prowadzić analizę danego nam problemu ☺

## Układ eliptyczny

Niekiedy używa się także innych krzywoliniowych układów współrzędnych. Stosunkowo często stosowany jest układ eliptyczny, będący uogólnieniem układu biegunowego (13):

$$x = a\,r\cos\phi \tag{17a}$$
$$y = b\,r\sin\phi \tag{17b}$$

Współrzędnymi są $(r, \phi)$, $r \geqslant 0$. Wielkości $a \neq 0$, $b \neq 0$ są parametrami. Dla $a = b = 1$ otrzymujemy układ biegunowy, dla $a = b \neq 1$ układ biegunowy z przeskalowanym promieniem. Dla $a \neq b$ krzywa $r = \text{const}$ jest elipsą.

Uogólnienie układu cylindrycznego jest oczywiste.