Fizyka dla firm — Matematyka

13. Układy równań liniowych

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

23 listopada 2020

Układ równań

Układ równań liniowych ma postać

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \tag{1}$$

Liczby a_{ij} nazywamy *współczynnikami układu równań*, liczby b_i *wyrazami wolnymi*. x_i oznaczają niewiadome. W powyższych oznaczeniach $i, j = 1, \dots, n$: w tym wykładzie ograniczamy się do przypadków, w których liczba równań zgadza się z liczbą niewiadomych.

Zapis macierzowy

Zgodnie z zasadami mnożenia macierzy, układ równań (1) można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Zapis symboliczny

Ponieważ macierze jednokolumnowe można utożsamiać z wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$), układ równań (2) można zapisać symbolicznie w postaci

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{3}$$

gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą współczynników, o elementach a_{ij}, $\mathbf{b}$ jest wektorem wyrazów wolnych, czyli wektorem o składowych b_i, natomiast $\mathbf{x}$ reprezentuje wektor niewiadomych, a jego składowe oznaczamy x_i.

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, lub też $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. W każdym wypadku zakładamy, że znamy wszystkie elementy macierzy $\mathbf{A}$ oraz wszystkie składowe wektora $\mathbf{b}$. Naszym celem jest obliczenie składowych wektora niewiadomych, $\mathbf{x}$.

Wyrażenie (3) jest równaniem liniowym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$).

Rzowiązanie formalne

Formalne rozwiązanie równania (3) ma postać

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,, \tag{4}$$

o ile macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$ istnieje. Wiemy już, że warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia macierzy odwrotnej jest, aby $\det \mathbf{A} \neq 0$. Wnioskujemy stąd, że jeżeli wyznacznik macierzy współczynników układu równań (1) **nie** znika, układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie.

Caveat emptor! W ogólnym wypadku jawna konstrukcja macierzy odwrotnej do macierzy współczynników, $\mathbf{A}^{-1}$, **nie** jest najbardziej efektywnym sposobem rozwiązywania układu równań liniowych.

Wzory Cramera

Niech W oznacza wyznacznik macierzy współczynników układu równań (2), $W = \det \mathbf{A}$. Wyznacznik ten nazywamy *wyznacznikiem głównym*.

Tworzymy *wyznaczniki poboczne* W_i przez zastąpienie i-tej kolumny macierzy współczynników przez kolumnę wyrazów wolnych:

$$W_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, W_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ itd} \tag{5}$$

Twierdzenie (Cramera): Jeżeli $W \neq 0$, układ równań (1) ma **jednoznaczne** rozwiązanie, przy czym

$$x_1 = \frac{W_1}{W},\ x_2 = \frac{W_2}{W},\ \dots,\ x_n = \frac{W_n}{W}\,. \tag{6}$$

Jeżeli $W = 0$, a *którykolwiek* $W_i \neq 0$, układ równań jest **sprzeczny** (nie ma rozwiązań).

Jeżeli $W = 0$ oraz *wszystkie* $W_i = 0$, układ równań ma **nieskończenie wiele** rozwiązań.

Obserwacja. Jeżeli $\det \mathbf{A} \neq 0$, jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu równań

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{7}$$

jest $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Warunkiem koniecznym na to, aby jednorodny układ równań (7) posiadał nietrywialne (niezerowe) rozwiązanie, jest $\det \mathbf{A} = 0$.

Przykład 1

Rozwiąż przy pomocy wzorów Cramera następujący układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 5y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 3y & - & 5z & = & 2 \\ 5x & - & 2y & + & 7z & = & 10 \end{array}\right. \tag{8a}$$

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 3\cdot 3\cdot 7 + (-5)\cdot(-5)\cdot 5 + 4\cdot(-2)\cdot 3 \\ &- 5\cdot 3\cdot 3 - 3\cdot(-5)\cdot(-2) - 4\cdot(-5)\cdot 7 = 229 \end{aligned} \tag{8b}$$

$$
\begin{aligned}
W_x &= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 10 & -2 & 7 \end{vmatrix} \\
&= 1\cdot 3\cdot 7 + (-5)\cdot(-5)\cdot 10 + 2\cdot(-2)\cdot 3 \\
&- 10\cdot 3\cdot 3 - 1\cdot(-5)\cdot(-2) - 2\cdot(-5)\cdot 7 = 229 \qquad \text{(8c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_y &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 5 & 10 & 7 \end{vmatrix} \\
&= 3\cdot 2\cdot 7 + 1\cdot(-5)\cdot 5 + 4\cdot 10\cdot 3 \\
&- 5\cdot 2\cdot 3 - 4\cdot 1\cdot 7 - 10\cdot(-5)\cdot 3 = 229 \qquad \text{(8d)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_z &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 10 \end{vmatrix} \\
&= 3\cdot 3\cdot 10 + (-5)\cdot 2\cdot(-2) + 5\cdot(-5)\cdot 2 \\
&- 5\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot(-2)\cdot 1 - 4\cdot(-5)\cdot 10 = 229 \qquad \text{(8e)}
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{229}{229} = 1 \tag{8f}$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{229}{229} = 1 \tag{8g}$$

$$z = \frac{W_z}{W} = \frac{229}{229} = 1 \tag{8h}$$

Przykład 2

Rozwiąż przy pomocy wzorów Cramera następujący układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & iy & - & 2z & = & 10 \\ x & - & y & + & 2iz & = & 20 \\ ix & + & 3iy & - & (1+i)z & = & 30 \end{array} \right. \tag{9a}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & i & -2 \\ 1 & -1 & 2i \\ i & 3i & -(1+i) \end{vmatrix} = 6 - 8i \tag{9b}$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 10 & i & -2 \\ 20 & -1 & 2i \\ 30 & 3i & -(1+i) \end{vmatrix} = -70 - 90i \tag{9c}$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & -2 \\ 1 & 20 & 2i \\ i & 30 & -(1+i) \end{vmatrix} = -90 - 30i \tag{9d}$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 1 & i & 10 \\ 1 & -1 & 20 \\ i & 3i & 30 \end{vmatrix} = -50 - 50i \tag{9e}$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{W_x}{W} = \frac{-70-90i}{6-8i} = \frac{(-70-90i)(6+8i)}{(6-8i)(6+8i)} = \frac{300-1100i}{100} \\
&= 3-11i \qquad (9f) \\
y &= \frac{W_y}{W} = \frac{-90-30i}{6-8i} = -3-9i \qquad (9g) \\
z &= \frac{W_z}{W} = \frac{-50-50i}{6-8i} = 1-7i \qquad (9h)
\end{aligned}
$$

Przykład 3

Rozwiąż przy pomocy wzorów Cramera następujący układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 7x & - & 2y & - & 5z & = & 1 \\ -2x & + & 4y & - & 2z & = & 1 \\ -5x & - & 2y & + & 7z & = & 1 \end{array} \right. \tag{10a}$$

$$W = \begin{vmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \tag{10b}$$

Wyznacznik główny znika, więc ten układ równań na pewno nie ma jednoznacznego rozwiązania. Czy istnieje rozwiązanie niejednoznaczne?

$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 72 \neq 0 \tag{10c}$$

Ponieważ $W = 0$, ale $W_x \neq 0$, układ równań jest sprzeczny.

Przykład 4

Rozwiąż przy pomocy wzorów Cramera następujący układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 7x & - & 2y & - & 5z & = & -1 \\ -2x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \\ -5x & - & 2y & + & 7z & = & 1 \end{array}\right. \tag{11a}$$

Wyznacznik główny tego układu już obliczaliśmy, patrz (10b), i wiemy, że $W = 0$. Czy istnieje rozwiązanie niejednoznaczne?

$$
\begin{aligned}
W_x &= \begin{vmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0 && \text{(11b)}\\
W_y &= \begin{vmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 && \text{(11c)}\\
W_z &= \begin{vmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 && \text{(11d)}
\end{aligned}
$$

Wyznacznik główny i wszystkie wyznaczniki poboczne znikają, więc układ ma rozwiązanie, ale nie jest ono jednoznacze. Spróbujmy je znaleźć.

W tym celu biorę *dwa* z równań (11a)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 7x & - & 2y & - & 5z & = & -1 \\ -2x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \tag{11e}$$

i rozwiążę je traktując z jako parametr. Otrzymuję

$$x = z - \frac{1}{6}\,,\; y = z - \frac{1}{12} \tag{11f}$$

Zwróćmy uwagę, że przy spełnieniu (11f), trzecie z równań (11a) jest spełnione tożsamościowo:

$$-5\left(z-\frac{1}{6}\right)-2\left(z-\frac{1}{12}\right)+7z = -5z+\frac{5}{6}-2z+\frac{2}{12}+7z = 1 \equiv 1 \tag{11g}$$

Przykład 5

Jakie są warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań układu równań

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2 z & = & a^3 \\ x & + & by & + & b^2 z & = & b^3 \\ x & + & cy & + & c^2 z & = & c^3 \end{array}\right. \tag{12a}$$

Wyznacznik główny tego układu wynosi

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = bc^2 + ab^2 + a^2c - a^2b - ac^2 - b^2c \\ &= -(a-b)(a-c)(b-c) \end{aligned} \tag{12b}$$

Jeżeli liczby a, b, c są parami różne, układ równań (12a) ma jednoznaczne rozwiązanie, które można wyznaczyć ze wzorów Cramera.

Jeżeli $a = b \neq c$, dwa z trzech równań (12a) są niezależne. Biorę pierwsze i trzecie równanie

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2 z & = & a^3 \\ x & + & cy & + & c^2 z & = & c^3 \end{array} \right. \tag{12c}$$

i rozwiązuję je, traktując y jako parametr. Otrzymuję

$$x = -ac(a + c - z) \tag{12d}$$

$$y = a^2 + (a + c)(c - z) \tag{12e}$$

a więc rozwiązania zależą od jednego parametru. Podobnie postępuję, gdy $a = c \neq b$, $b = c \neq a$ (trzeba wyeliminować inne z trzech równań).

Jeżeli $a = b = c$, tylko jedno z równań (12a) jest niezależne i otrzymuję rozwiązanie zależne od dwu parametrów:

$$x = a^3 - a^2 z - ay \tag{12f}$$

Komentarz: znaczenie wzorów Cramera

Wzory Cramera dostarczają *ścisłego, analitycznego* kryterium istnienia i jednoznaczności rozwiązań układu równań (1); co więcej, jest to kryterium konstruktywne. W praktyce wykorzystanie wzorów Cramera jest ograniczone przez konieczność obliczania wyznaczników, co w ogólności wymaga rzędu $n!$ operacji, gdzie n jest wymiarowością problemu. Już dla $n \sim 5$ i większych może to być bardzo uciążliwe, a dla $n \gg 1$ oznacza to bardzo dużą liczbę obliczeń. Dlatego ze wzorów Cramera korzystamy dla niewielkich układów równań lub gdy dzięki szczególnym własnościom macierzy współczynników, obliczanie odpowiednich wyznaczników jest proste.

Poza tymi przypadkami korzystamy z innych metod rozwiązywania układów równań liniowych.

Co można zrobić z układem równań

…tak, aby jego rozwiązania się nie zmieniły?

Rozważam układ równań (przykład 3×3 dla oszczędności miejsca):

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \right. \tag{13}$$

1. Równania można zapisać w innej kolejności:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \right. \tag{14}$$

Odpowiada to **permutacji wierszy macierzy układu równań, z jednoczesną permutacją kolumny wyrazów wolnych**.

2. Równania można dodać stronami, po pomnożeniu przez dowolną stałą różną od zera:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ (z \cdot a_{11} + a_{31})x_1 & + & (z \cdot a_{12} + a_{32})x_2 & + & (z \cdot a_{13} + a_{33})x_3 & = & z \cdot b_1 + b_3 \end{array} \right. \tag{15}$$

Odpowiada to **zastąpieniu jednego wiersza macierzy układu równań przez dowolną kombinację liniową tego wiersza z innymi, z jednoczesną analogiczną operacją na kolumnie wyrazów wolnych**.

3. We wszystkich równaniach można przestawić kolejność, w jakiej pojawiają się zmienne:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{13}x_3 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{23}x_3 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{33}x_3 & + & a_{32}x_2 & = & b_3 \end{array}\right. \tag{16}$$

Odpowiada to **permutacji *kolumn* macierzy układu równań, z jednoczesną permutacją kolumny niewiadomych**.

Eliminacja Gaussa

Rozpatrzmy jeszcze raz układ równań

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}\right. \tag{17}$$

Podzielmy pierwsze równanie stronami przez a_{11}

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 & + & \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 & = & \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}\right. \tag{18}$$

Teraz mnożymy pierwsze z równań (18) przez a_{21} i odejmijmy stronami od drugiego, a następnie mnożymy pierwsze z równań (18) przez a_{31} i odejmijmy stronami od trzeciego. Otrzymujemy

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 & + & \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 & = & \frac{b_1}{a_{11}} \\ & & \left(a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 & + & \left(a_{23}-\frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 & = & b_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ & & \left(a_{32}-\frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 & + & \left(a_{33}-\frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 & = & b_3-\frac{a_{31}}{a_{11}}b_1 \end{array}\right. \tag{19a}$$

Przepiszmy to w postaci (tylko zmiana oznaczeń!)

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & a'_{13}x_3 & = & b'_1 \\ & & a'_{22}x_2 & + & a'_{23}x_3 & = & b'_2 \\ & & a'_{32}x_2 & + & a'_{33}x_3 & = & b'_3 \end{array}\right. \tag{19b}$$

W układzie równań (19b) pierwsza zmienna, x_1, występuje wyłącznie w pierwszym równaniu. Tego równania już nie przekształcamy, natomiast z pozostałymi równaniami postępujemy analogicznie: dzielimy drugie stronami przez a'_{22} i odpowiednio mnożąc, odejmujemy od trzeciego. Otrzymujemy

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & a'_{13}x_3 & = & b'_1 \\ & & x_2 & + & a''_{23}x_3 & = & b''_2 \\ & & & & a''_{33}x_3 & = & b''_3 \end{array} \right. \tag{20}$$

Teraz pierwsza zmienna występuje wyłącznie w pierwszym równaniu, druga — w pierwszym i w drugim. Gdyby równań było więcej, moglibyśmy to postępowanie kontynuować.

Ostatecznie otrzymalibyśmy równanie postaci

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & \bullet x_2 & + & \bullet x_3 & + & \dots & + & \bullet x_n & = & \tilde{b}_1 \\ & & x_2 & + & \bullet x_3 & + & \dots & + & \bullet x_n & = & \tilde{b}_2 \\ & & & & x_3 & + & \dots & + & \bullet x_n & = & \tilde{b}_3 \\ & & & & & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & & & & & & & x_n & = & \tilde{b}_n \end{array}\right. \tag{21}$$

gdzie symbole $\bullet$ oznaczają *jakieś* współczynniki, dające się wyliczyć z pierwotnych współczynników równania, $\tilde{b}_i$ są przekształconymi w toku całej procedury wyrazami wolnymi.

Równanie w postaci (21) nazywamy układem równań *z macierzą trójkątną górną*. Algorytm prowadzący od (17) do (21) nazywamy *eliminacją Gaussa*.

Złożoność obliczeniowa eliminacji Gaussa

Aby usunąć zmienną x_1 z jednego wiersza, należy wykonać $O(n)$ operacji. Ponieważ zmienną x_1 musimy usunąć z $n-1$ wierszy, musimy łącznie wykonać $O(n^2)$ operacji. Ponieważ musimy to samo zrobić ze zmiennymi $x_2, x_3, \ldots$, ostatecznie musimy wykonać $O(n^3)$ operacji.

Złożoność obliczeniowa eliminacji Gaussa wynosi $O(n^3)$.

Backsubstitution

Rozpatrzmy układ równań w postaci (21). Ostatnie równanie jest rozwiązane ze względu na x_n. Podstawiamy to rozwiązanie do wszystkich poprzednich równań. Teraz drugie od dołu równanie ma tylko jedną nieznaną zmienną — x_{n-1}, a coś takiego umiemy rozwiązać. Podstawiamy to rozwiązanie do równania trzeciego od dołu i do poprzednich. Teraz trzecie od dołu równanie zawiera tylko jedną zmienną, x_{n-2}. Rozwiązujemy, podstawiamy do poprzednich i tak dalej...

Ponieważ wyeliminowanie jednej zmiennej wymaga $O(n)$ operacji, a musimy wyeliminować n zmiennych, cały koszt rozwiązania układu z macierzą trójkątną górną za pomocą algorytmu *backsubstitution* wynosi $O(n^2)$. Jest to *niewiele* w porównaniu z kosztem eliminacji Gaussa.

Całkowity koszt rozwiązania układu n równań liniowych za pomocą eliminacji Gaussa z następującym *backsubstitution* wynosi $O(n^3)$.

Przykład

Przy pomocy eliminacji Gaussa wraz z *backsubstitution* rozwiążmy układ równań

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & w & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & + & w & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 3z & + & 2w & = & 3 \\ -x & + & y & - & z & + & w & = & 0 \end{array}\right. \tag{22}$$

Kolejne etapy eliminacji Gaussa wyglądają następująco:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 1 \\ & & y & - & 4z & - & w & = & 0 \\ & - & 3y & + & 2z & + & w & = & 2 \\ & & 2y & & & + & 2w & = & 1 \end{array}\right. \tag{23a}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 1 \\ & & y & - & 4z & - & w & = & 0 \\ & & & - & 10z & - & 2w & = & 2 \\ & & & & 8z & + & 4w & = & 1 \end{array}\right. \tag{23b}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 1 \\ & & y & - & 4z & - & w & = & 0 \\ & & & & z & + & \frac{1}{5}w & = & -\frac{1}{5} \\ & & & & 8z & + & 4w & = & 1 \end{array}\right. \tag{23c}$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & + & y & + & z & + & w & = & 1 \\
 & & y & - & 4z & - & w & = & 0 \\
 & & & & z & + & \frac{1}{5}w & = & -\frac{1}{5} \\
 & & & & & & \frac{12}{5}w & = & \frac{13}{5}
\end{array}
\right.
\tag{23d}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & + & y & + & z & + & w & = & 1 \\
 & & y & - & 4z & - & w & = & 0 \\
 & & & & z & + & \frac{1}{5}w & = & -\frac{1}{5} \\
 & & & & & & w & = & \frac{13}{12}
\end{array}
\right.
\tag{23e}
$$

Teraz mogę przystąpić do *backsubstitution*. Ostatnie równanie jest już rozwiązane, $w = \frac{13}{12}$. Podstawiam to rozwiązanie do poprzednich równań i otrzymuję

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & \frac{13}{12} & = & 1 \\ & & y & - & 4z & - & \frac{13}{12} & = & 0 \\ & & & & z & + & \frac{1}{5}\cdot\frac{13}{12} & = & -\frac{1}{5} \\ & & & & & & w & = & \frac{13}{12} \end{array} \right. \tag{24a}$$

$$\begin{cases} x + y + z & = -\frac{1}{12} \\ y - 4z & = \frac{13}{12} \\ z & = -\frac{5}{12} \\ w & = \frac{13}{12} \end{cases} \tag{24b}$$

$$\begin{cases} x + y - \frac{5}{12} & = -\frac{1}{12} \\ y + 4\cdot\frac{5}{12} & = \frac{13}{12} \\ z & = -\frac{5}{12} \\ w & = \frac{13}{12} \end{cases} \tag{24c}$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & + & y & & & & & = & \frac{4}{12} \\
 & & y & & & & & = & -\frac{7}{12} \\
 & & & & z & & & = & -\frac{5}{12} \\
 & & & & & & w & = & \frac{13}{12}
\end{array}
\right.
\tag{24d}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & - & \frac{7}{12} & & & & & = & \frac{4}{12} \\
 & & y & & & & & = & -\frac{7}{12} \\
 & & & & z & & & = & -\frac{5}{12} \\
 & & & & & & w & = & \frac{13}{12}
\end{array}
\right.
\tag{24e}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{lllllll}
x & & & & = & \frac{11}{12} \\
 & y & & & = & -\frac{7}{12} \\
 & & z & & = & -\frac{5}{12} \\
 & & & w & = & \frac{13}{12}
\end{array}
\right.
\tag{24f}
$$

Komentarz: Praktyczne zastosowania eliminacji Gaussa

Tak opisana eliminacja Gaussa może zawieść ☹ Rozpatrzmy **Przykład**: Układu równań

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right. \tag{25}$$

nie da się doprowadzić do postaci trójkątnej górnej za pomocą eliminacji Gaussa. Jeśli jednak przestawimy pierwszy wiersz z drugim lub z trzecim, eliminacja Gaussa powiedzie się.

Nawet jeśli eliminacja Gaussa *technicznie* się powiedzie, może się okazać, przy próbie jej zakodowania, że jest niestabilna numerycznie. Problemy te rozwiązuje się za pomocą techniki zwanej *pivotingiem*, ale wykracza to poza zakres tego wykładu. Są także inne, znacznie bardziej wydajne techniki numerycznego rozwiązywania układów równań.