Fizyka dla firm — Matematyka

12. Wyznaczniki

Operatory liniowe

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

19 listopada 2020

Wyznacznik macierzy kwadratowej

Niech $\mathbf{A}$ będzie rzeczywistą (lub zespoloną) macierzą **kwadratową** $n \times n$. Niech $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ będą jej elementami. Utwórzmy iloczyn $a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdots a_{n,\alpha_n}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jest permutacją liczb $1, 2, \dots, n$. Iloczyn ten zawiera dokładnie jeden element każdego wiersza i każdej kolumny macierzy $\mathbf{A}$. Opatrzmy go znakiem permutacji $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Sumę

$$\sum_{\text{wszystkie permutacje}} (-1)^{\text{krotność permutacji}} a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdots a_{n,\alpha_n} \tag{1}$$

nazywam wyznacznikiem macierzy $\mathbf{A}$ i oznaczam $\det \mathbf{A}$.

Wyznacznik macierzy zapisuje się też często w postaci (proste kreski!)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Ponieważ wszystkich permutacji ciągu n-elementowego jest $n!$, do obliczenia wyznacznika “z definicji” potrzeba rzędu $n!$ operacji, co jest (i) kosztowne, (ii) kłopotliwe, gdyż trzeba pilnować, aby nie “zgubić” jakiegoś składnika. Na szczęście, wyznaczniki macierzy 2×2 i 3×3 liczy się prosto, a wyznaczniki macierzy wyższych rzędów można obliczać korzystając z rozwinięcia Laplace’a (patrz niżej).

Wyznacznik macierzy 2×2

Wyznacznik macierzy 2×2 jest sumą dwóch składników, gdyż ciąg dwu-elementowy ma tylko $2! = 2$ permutacji. Permutacja $\{1, 2\}$ jest parzysta, permutacja $\{2, 1\}$ jest nieparzysta.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} \tag{3}$$

Reguła mnemotechniczna: Wyznacznik macierzy 2×2 jest równy iloczynowi elementów na głównej przekątnej minus iloczyn elementów na anty-przekątnej.

Przykłady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = -2\,. \tag{4a}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 201 & 50 \\ 281 & 70 \end{vmatrix} &= 201\cdot 70 - 281\cdot 50 \\ &= (1+4\cdot 50)\cdot 70 - (1+4\cdot 70)\cdot 50 \\ &= 1\cdot 70 + 4\cdot 50\cdot 70 - 1\cdot 50 - 4\cdot 70\cdot 50 \\ &= 1\cdot 70 - 1\cdot 50 = 20 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 50 \\ 1 & 70 \end{vmatrix} = 10\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4b}$$

$$\begin{vmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & 1+i \end{vmatrix} = (1-i)\cdot(1+i) - 1\cdot 1 = 1-(i)^2 - 1 = -(-1) = 1 \tag{4c}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi - \left(-\sin^2\varphi\right) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \tag{4d}$$

Wyznacznik macierzy 3×3

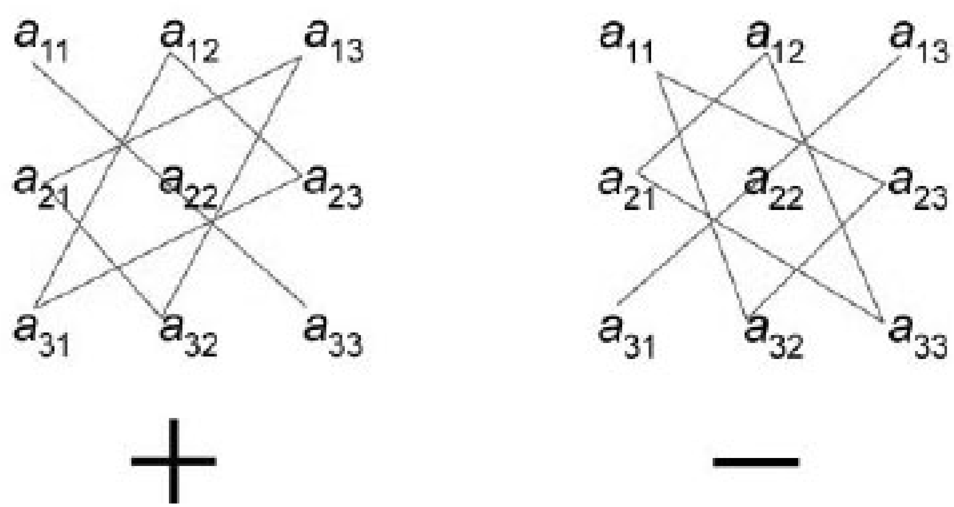
Wyznacznik macierzy 3×3 jest sumą sześciu składników, gdyż ciąg trzy-elementowy ma $3! = 6$ permutacji. Permutacje $\{1,2,3\}, \{3,1,2\}, \{2,3,1\}$ są parzyste, permutacje $\{3,2,1\}, \{2,1,3\}, \{1,3,2\}$ są nieparzyste. Zatem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\,. \tag{5}$$

Reguła Sarrusa

Mnemotechnicznym sposobem obliczania wyznacznika macierzy 2×3 jest *reguła Sarrusa*:

Wyznacznik liczymy tak:



… albo tak:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ \multicolumn{1}{|c}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ \multicolumn{1}{|c}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \hline & & + & + & + \end{array} =$$

Przykłady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 6\cdot 8 - 2\cdot 4\cdot 9$$
$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 225 - 225 = 0\,. \tag{6a}$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{vmatrix} = a\cdot c\cdot e + 0\cdot 0\cdot d + 0\cdot 0\cdot b - b\cdot c\cdot d - 0\cdot 0\cdot a - 0\cdot 0\cdot e$$
$$= ace - bcd = c(ae - bd) \tag{6b}$$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2+3i & 2-2i & 1-i \\ 2+i & 7-3i & 3-i \\ 1+i & 4-6i & 2-3i \end{vmatrix} &= (2+3i)(7-3i)(2-3i) \\
&+ (2-2i)(3-i)(1+i) \\
&+ (2+i)(4-6i)(1-i) \\
&- (1+i)(7-3i)(1-i) \\
&- (2-2i)(2+i)(2-3i) \\
&- (2+3i)(3-i)(4-6i) \\
&= 11(1-i) \qquad \text{(6c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{vmatrix}
\cos\vartheta\,\cos\varphi & -r\sin\vartheta\,\cos\varphi & -r\cos\vartheta\,\sin\varphi \\
\cos\vartheta\,\sin\varphi & -r\sin\vartheta\,\sin\varphi & r\cos\vartheta\,\cos\varphi \\
\sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0
\end{vmatrix} =
$$

$$
\begin{gathered}
-r^2\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta\,\cos^2\varphi - r^2\cos^3\vartheta\,\sin^2\varphi \\
-r^2\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta\,\sin^2\varphi - r^2\cos^3\vartheta\,\cos^2\varphi \\
= -r^2\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta - r^2\cos^3\vartheta = -r^2\cos\vartheta
\end{gathered} \tag{6d}
$$

Rozwinięcie Laplace'a

Rozwinięcie Laplace'a to wzór rekurencyjny, pozwalający obliczyć wyznacznik macierzy $n \times n$ “rozwijając” względem ustalonej kolumny lub ustalonego wiersza, z wyliczaniem wyznaczników o wymiarach $(n-1)\times(n-1)$.

Ustalamy pewną kolumnę, j. Wówczas

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \mathrm{minor}(i,j) \tag{7}$$

gdzie “minor” to wyznacznik macierzy powstałej z wykreślenia i-tego wiersza i j-tej kolumny z wyjściowej macierzy.

Analogicznie — dla wierszy.

Przykład

Obliczmy wyznacznik

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{8}$$

Korzystam z rozwinięcia względem pierwszej kolumny.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M} &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2 \cdot 1 + 2(-1)^3 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)^4 \cdot (-3) + 4 \cdot (-1)^5 \cdot 4 = -28 \end{aligned} \tag{9}$$

Obliczmy wyznacznik (8) jeszcze raz, tym razem korzystając z rozwinięcia względem drugiego wiersza:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M} &= 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \text{wyznacznik}_3 + 0 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \text{wyznacznik}_4 \\ &= -2 \cdot 2 + (1 - 16 - 9) = -28 \end{aligned} \tag{10}$$

Korzystając z rozwinięcia Laplace'a, warto rozwijać według wiersza lub kolumny, w której pojawia się jak najwięcej zer.

Własności wyznaczników

- Wyznacznik iloczynu to iloczyn wyznaczników. Jeżeli $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ są macierzami kwadratowymi o tym samym wymiarze, to

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}) \tag{11}$$

- Wyznacznik macierzy transponowanej równa się wyznacznikowi macierzy przed transpozycją.

$$\det\left(\mathbf{A}^T\right) = \det \mathbf{A} \tag{12}$$

- Dla macierzy n-wymiarowej

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{A}) = \lambda^n \cdot \det \mathbf{A} \tag{13}$$

- Jeżeli macierz ma dwie kolumny identyczne, to jej wyznacznik jest równy zero.

- Przy przestawieniu dwu sąsiednich kolumn, znak wyznacznika ulega zmianie.

- Jeżeli macierz ma kolumnę zerową, to jej wyznacznik jest równy zero.

- Jeżeli *jedną* kolumnę macierzy pomnożymy przez stałą λ, to wyznacznik będzie się równać $\lambda \cdot$ (wyznacznik macierzy niewymnożonej).

- Jeżeli do elementów jednej kolumny macierzy dodamy elementy innej kolumny wymnożonej przez jakąś stałą, wyznacznik nie zmieni się.

- Ponieważ wyznacznik nie zauważa transpozycji, w powyższych własnościach “kolumnę” można zastąpić przez “wiersz”.

- Wyznacznik macierzy diagonalnej jest równy iloczynowi elementów diagonalnych.

  Istotnie, korzystając z rozwinięcia Laplace’a względem pierwszej kolumny

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{14}$$

  Po prawej stronie (14) otrzymaliśmy wyznacznik macierzy o takiej samej strukturze, jak po lewej stronie, tylko o wymiarze o jeden mniejszym. Zatem, przez rekursję, otrzymujemy tezę, gdyż wszystkie potęgi (-1) są parzyste.

- Wyznacznik macierzy trójkątnej, czyli macierzy mającej pod *lub* nad główną diagonalą same zera, jest równy iloczynowi elementów diagonalnych. (Dowód: rozwinięcie Laplace'a względem pierwszej kolumny *lub* ostatniego wiersza.)

Przykłady

Obliczmy jeszcze raz wyznacznik (4b)

$$\begin{vmatrix} 201 & 50 \\ 281 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 201-4\cdot 50 & 50 \\ 281-4\cdot 70 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 50 \\ 1 & 70 \end{vmatrix} = 10\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 20 \tag{15a}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że do pierwszej kolumny można dodać drugą pomnożoną przez 4, a potem można wyciągnąć wspólny czynnik przed wyznacznik.

Obliczmy teraz ponownie wyznacznik (6a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3-2 \\ 4 & 5 & 6-5 \\ 7 & 8 & 9-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2-1 & 1 \\ 4 & 5-4 & 1 \\ 7 & 8-7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{15b}$$

gdzie najpierw odjęliśmy drugą kolumnę od trzeciej, a potem pierwszą od drugiej. Powstały wyznacznik ma dwie kolumny identyczne, a zatem musi się równać 0.

Teraz obliczmy wyznacznik (6c)

$$\begin{vmatrix} 2+3i & 2-2i & 1-i \\ 2+i & 7-3i & 3-i \\ 1+i & 4-6i & 2-3i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3i & 2-2i-2(1-i) & 1-i \\ 2+i & 7-3i-2(3-i) & 3-i \\ 1+i & 4-6i-2(2-3i) & 2-3i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2+3i & 0 & 1-i \\ 2+i & 1-i & 3-i \\ 1+i & 0 & 2-3i \end{vmatrix} = (1-i)\cdot \begin{vmatrix} 2+3i & 1-i \\ 1+i & 2-3i \end{vmatrix} = 11(1-i) \tag{15c}$$

Od drugiej kolumny odjęliśmy trzecią pomnożoną przez 2, a potem dokonaliśmy rozwinięcia Laplace'a względem drugiej kolumny.

Po co jemy tę żabę?

Macierz odwrotna

Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ będzie macierzą kwadratową. Macierz odwrotna, $\mathbf{A}^{-1}$ *jeśli istnieje*, musi spełniać

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I} \tag{16}$$

Macierz, dla której istnieje macierz odwrotna, naywam macierzą odwracalną. Macierz, dla której macierz odwrotna *nie* istnieje, nazywam macierzą osobliwą.

Twierdzenie: Macierz jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Własności macierzy odwrotnej

Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą macierzami kwadratowymi, odwracalnymi, rzeczywistymi lub zespolonymi, o takim samym wymiarze. Wówczas

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A} \tag{17a}$$

$$\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = (\det \mathbf{A})^{-1} \tag{17b}$$

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T} = \left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1} \tag{17c}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{17d}$$

Macierz odwrotna do macierzy 2×2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{18a}$$

Istotnie,

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18b}$$

Operator liniowy

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, zaś $\mathbf{A} : V \to V$ pewną funkcją, działającą z V w V. (Przypominam, ze “interesujące” są przypadki $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.) Niech $\mathbf{0}$ oznacza wektor zerowy w V. Mówimy, że $\mathbf{A}$ jest operatorem liniowym, jeżeli

$$\mathbf{A0} = \mathbf{0}\,, \tag{19a}$$

$$\forall\alpha \in \mathbb{K}\,,\ \mathbf{v} \in V : \alpha \cdot \mathbf{Av} = \mathbf{A}\left(\alpha \cdot \mathbf{v}\right), \tag{19b}$$

$$\forall\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\ :\ \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{Au}) + (\mathbf{Av})\,. \tag{19c}$$

Z zasad (19) wynika, że efektem działania operatora liniowego na dowolną kombinację liniową wektorów, jest odpowiednia kombinacja liniowa wyników:

$$\mathbf{A}(\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot (\mathbf{Au}) + \beta \cdot (\mathbf{Av})\,. \tag{20}$$

Macierze jako operatory liniowe

Rozważmy macierz kwadratową $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, oraz **jednokolumnowe** wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N\times 1}$. Z wprowadzonych poprzednio zasad na dodawanie i mnożenie macierzy wynika, że są one zgodne z zasadami (19).

Macierze kwadratowe $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ traktujemy jak operatory liniowe w $\mathbb{R}^N$, a jednokolumnowe, N wierszowe macierze jak wektory w tej przestrzeni.

Pojęcie operatora liniowego można ponadto uogólnić na funkcje działające pomiędzy *różnymi* przestrzeniami liniowymi, w szczególności, pomiędzy przestrzeniami liniowymi o różnych wymiarach. Wówczas macierze $\mathbf{A}^{M\times N}$ traktujemy jak operatory liniowe $\mathbf{A} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$.

Podobnie dla $\mathbb{C}^N$.

Przykład

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \\ 2 \cdot 5 + 6 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 52 \end{bmatrix} \tag{21a}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \left(2 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10 - 1 \cdot 14 \\ 1 \cdot 10 + 3 \cdot 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 52 \end{bmatrix} \tag{21b}$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2-3 \\ 1+9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8-4 \\ 4+12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1+4 \\ 10+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 26 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{22a}
$$

$$
\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-7 \\ 5+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 26 \end{bmatrix} \tag{22b}
$$