Fizyka dla firm — Matematyka

11. Grupa, pierścień, ciało

Przestrzeń liniowa

Rachunek macierzowy

P. F. Góra

`http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/`

16 listopada 2020

Grupa

Mówimy, że pewien zbiór G wraz z określonym w nim dwuargumentowym działaniem $\circ$ tworzy grupę, jeżeli spełnione są następujące aksjomaty:

- Działanie jest wewnętrzne: $\forall a, b \in G : a \circ b \in G$.
- Działanie jest łączne: $\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
- Istnieje element neutralny: $\exists e \in G \; \forall a \in G : a \circ e = a$.
- Dla każdego elementu istnieje element odwrotny: $\forall a \in G \; \exists a' \in G : a \circ a' = e$.

Jeśli dodatkowo $\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$, grupę nazywam abelową (przemienną).

Przykłady

Zbiór liczb rzeczywistych wraz z dodawaniem stanowi grupę. Zbiór liczb rzeczywistych bez zera (elementu neutralnego dodawania) wraz z mnożeniem stanowi grupę. Podobnie — zbiór liczb zespolonych.

Zbiór wektorów (swobodnych) w $\mathbb{R}^2$, a także w $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, ..., $\mathbb{R}^n$, ... wraz z dodawaniem wektorów stanowi grupę.

Z geometrii znamy grupy translacji, jednokładności, obrotów, grupy symetrii wielokątów foremnych.

Permutacje

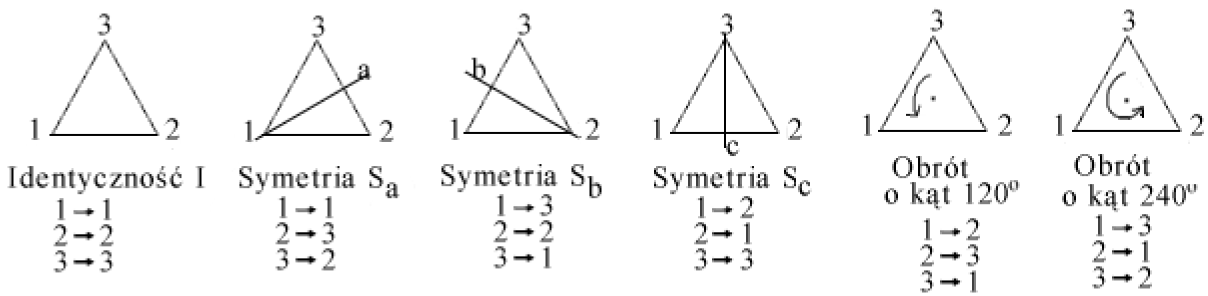
Dany jest ciąg N-elementowy $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Każdy sposób ustawienia wyrazów tego ciągu w innej kolejności nazywam *permutacją* wyrazów tego ciągu. Można powiedzieć, że permutacja to sposób przenumerowania wyrazów tego ciągu, czyli zastąpienia ciągu $\{1, 2, \ldots, N\}$ ciągiem $\{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$. Elementy ciągu $\{i_k\}_{k=1}^{N}$ muszą należeć do zbioru $\{1, 2, \ldots, N\}$ i nie mogą się powtarzać.

Liczba permutacji ciągu n-elementowego wynosi $n!$: Na pierwszym miejscu możemy ustawić dowolny z n elementów, na drugim $n-1$ elementów (jeden element jest już ustawiony na pierwszym miejscu), na trzecim $n-2$ elementów (dwa elementy już są ustawione na pierwszym i drugim miejscu) i tak dalej.

Permutacje tworzą grupę, zwaną grupą permutacji.

Przykład

Rozważmy grupę symetrii trójkąta równobocznego*. Są to odbicia względem symetralnych poszczególnych boków, obroty wokół środka trójkąta o $2\pi/3$ i $4\pi/3$ oraz tożsamość. Jeśli ponumerujemy wierzchołki trójkąta, wszystkie te symetrie okazują się być permutacjami zbioru $\{1, 2, 3\}$, a grupa symetrii trójkąta równobocznego staje się w pewnym sensie równoważna grupie permutacji tego zbioru.



*Przykład ten i rysunek pochodzą ze strony `http://www.mini.pw.edu.pl/miniwyklady/algebra/grupy/gr_permutacji/gr_permutacji.html`

Inwersje

Niech ciąg $\{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$ będzie ciągiem wartości pewnej permutacji. Mówimy, że w ciągu tym para k, l tworzy inwersję (nieporządek), jeżeli $i_k < i_l$ dla $k > l$. Przez *znak permutacji* rozumiem $(-1)^{\text{liczba inwersji}}$. Permutacje o znaku dodatnim nazywam parzystymi, permutacje o znaku ujemnym nieparzystymi.

Przykład

Rozważam permutacje ciągu $\{1, 2, 3\}$. Jest ich $3! = 6$.

Permutacjami parzystymi są $\{1, 2, 3\}$ (zero inwersji), $\{2, 3, 1\}$ (inwersje 1-2, 1-3) oraz $\{3, 1, 2\}$ (inwersje 1-3, 2-3).

Permutacjami nieparzystymi są $\{2, 1, 3\}$ (inwersja 1-2), $\{1, 3, 2\}$ (inwersja 2-3) oraz $\{3, 2, 1\}$ (inwersje 1-3, 1-2, 2-3).

Copyright © 2020 P. F. Góra

Pierścień

Rozważamy zbiór R z określonymi na nim dwoma działaniami $+$ oraz $\cdot$, zwanymi, odpowiednio, dodawaniem i mnożeniem.

Jeżeli R wraz z dodawaniem $+$ jest grupą abelową, natomiast R wraz z mnożeniem $\cdot$ jest półgrupą (mnożenie jest wewnętrzne, łączne, nie zakłada się istnienia elementu neutralnego, a nawet jeśli on istnieje, nie zakłada się odwracalności mnożenia), a dodatkowo działania są rozdzielne:

- $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $\forall a, b, c \in R : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

strukturę tę nazywam pierścieniem. Jeżeli istnieje element neutralny dla mnożenia, mówimy o pierścieniu z jedynką. Jeżeli dodatkowo mnożenie jest przemienne, mówimy o pierścieniu przemiennym.

Przykłady

Zbiór liczb całkowitych z dodawaniem i mnożeniem stanowi pierścień. Zbiór wielomianów stanowi pierścień. Są to pierścienie z jedynką.

Ciało

Pierścień przemienny z jedynką, w którym wszystkie elementy za wyjątkiem zera (elementu neutralnego dodawania) mają elementy odwrotne względem mnożenia, nazywam ciałem.

Przykłady

Zbiory liczb wymiernych, rzeczywistych, zespolonych wraz z dodawaniem i mnożeniem stanowią ciała.

Copyright © 2020 P. F. Góra

Przestrzeń liniowa

Niech $\mathbb{K}$ będzie pewnym ciałem liczbowym[†], a V pewnym zbiorem. Mówimy, że V tworzy przestrzeń liniową (przestrzeń wektorową) nad ciałem $\mathbb{K}$, jeżeli określone są dwa działania: mnożenie wektora (elementu V) przez skalar (element $\mathbb{K}$) oraz dodawanie wektorów, przy czym:

- Dodawanie wektorów jest łączne: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- Dodawanie wektorów jest przemienne: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- Istnieje element neutralny względem dodawania wektorów: $\exists \mathbf{0} \in V\ \forall \mathbf{v} \in V : \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
- Każdy wektor ma wektor przeciwny: $\forall \mathbf{v} \in V\ \exists \mathbf{v}' \in V : \mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}$
- Mnożenie przez skalar jest rozdzielne względem dodawania wektorów: $\forall a \in \mathbb{K}\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{u}$

[†]W praktyce interesujące są przypadki $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Copyright © 2020 P. F. Góra

- Mnożenie przez skalar jest rozdzielne względem dodawania skalarów: $\forall a, b \in \mathbb{K}\ \forall \mathbf{v} \in V : (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$
- Mnożenie wektora przez skalar jest zgodne z mnożeniem skalarów: $\forall a, b \in \mathbb{K}\ \forall \mathbf{v} \in V : a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{v}$
- Jeżeli 1 jest jedynką (elementem neutralnym ciała $\mathbb{K}$ względem mnożenia), to $\forall \mathbf{v} \in V : 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$

Przykłady

Przestrzenie $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n, \dots$ stanowią przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$, i podobnie dla przestrzeni zespolonych.

Zbiór wielomianów stanowi przestrzeń liniową (wielomiany są “wektorami niegeometrycznymi”).

Kombinacja liniowa

Wektor postaci $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ oraz $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in V$, nazywam kombinacją liniową tych wektorów.

Mówiąc niezbyt formalnie, sens przestrzeni liniowej jest taki, że każda kombinacja liniowa wektorów z tej przestrzeni sama jest wektorem z tej przestrzeni (należy do tej przestrzeni).

Copyright © 2020 P. F. Góra

Wymiar i baza przestrzeni

Mówimy, że wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ są liniowo niezależne, jeżeli ich kombinacja liniowa

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{v}_m \tag{1}$$

równa się zero wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współczyniki kombinacji jednocześnie znikają: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$. Jeżeli kombinacja liniowa może znikać gdy nie wszystkie współczynniki kombinacji się zerują, wektory nazywam liniowo zależnymi.

Mówimy, że przestrzeń liniowa jest n-wymiarowa, jeśli istnieje w niej n liniowo niezależnych wektorów, a każde $n+1$ wektorów jest liniowo zależne. Wówczas $\dim V = n$.

Copyright © 2020 P. F. Góra

Bazą przestrzeli liniowej V o wymiarze n nazywam *każdy* ciąg n liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in V$. Każdy wektor $\mathbf{x} \in V$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazy:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n. \tag{2}$$

Jeżeli w przestrzeni określona jest struktura iloczynu skalarnego, bazę, której elementy są wzajemnie ortogonalne, nazywam bazą ortogonalną. Jeżeli dodatkowo długość każdego wektora bazowego wynosi jeden, bazę taką nazywam ortonormalną: $\forall i, j = 1, \ldots, n : \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

Przykłady

Bazą w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ są wektory $[1, 0]$, $[0, 1]$. Jest to baza ortonormalna. Inną bazą stanowią wektory $[1, 0]$, $[1, 1]$. Ta baza nie jest ortogonalna.

Rozważmy zbiór wielomianów stopnia co najwyżej n. W tej przestrzeni bazą są funkcje $1, x, x^2, \dots, x^n$. Wymiar takiej przestrzeni wynosi $n+1$.

Copyright © 2020 P. F. Góra

Podprzestrzeń liniowa

Niech V będzie przestrzenią liniową i niech $U \subset V$. Jeżeli U jest przestrzenią liniową z uwagi na te same działania, co V, mówimy, że U jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Przykład

$\mathbb{R}^3$ stanowi przestrzeń liniową. Zbiór wektorów postaci $[x, y, 0]$ stanowi podprzestrzeń tej przestrzeni; można ją utożsamiać z przestrzenią $\mathbb{R}^2$.

Copyright © 2020 P. F. Góra

Macierze

Macierzą nazywam prostokątną tablicę liczb. Przypuśćmy, że tablica ta ma M wierszy i N kolumn. Oznaczmy tę tablicę przez $\mathbf{A}$. Jeśli liczby, z których zbudowana jest macierz (elementy macierzy), są rzeczywiste, mówię, że $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$. Jeśli elementy macierzy są zespolone, mówię, że $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M\times N}$.

Przykłady macierzy

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 8 \\ 16 & -3 & 2 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{3} \\ \frac{\ln 2}{3} & \frac{\ln 3}{2} \\ \frac{5}{16} & -\frac{8}{19} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Copyright © 2020 P. F. Góra

Elementy macierzy

Element macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ (lub $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M\times N}$) stojący na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny oznaczam A_{ij}. Zauważmy, że $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$. Dla macierzy z jednego z powyższych przykładów

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 8 \\ 16 & -3 & 2 & -11 \end{bmatrix}$$

$A_{11} = -2$, $A_{12} = 1$, $A_{14} = 8$, $A_{21} = 16$,$A_{23} = 2$. Symbol “A_{11}” czytam “a-jeden-jeden”. Na ogół nie ma potrzeba oddzielania indeksów przecinakami, ale można to robić, a niekiedy trzeba, jeśli z kontekstu nie jest jasne, o co chodzi. Na przykład zamiast $A_{11} = -2$ mógłbym napisać $A_{1,1} = -2$.

Kolejność ma znaczenie! W ogólności $A_{ij} \neq A_{ji}$. W powyższym przykładzie $A_{12} = 1$, natomiast $A_{21} = 16$. $A_{23} = 2$, a element A_{32} w ogóle nie jest określony.

Mnożenie macierzy przez skalar

Definiuję mnożenie macierzy przez skalar w ten sposób, że wszystkie elementy macierzy należy pomnożyć przez ten skalar. Na przykład

$$-2\cdot\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot 4 & -2\cdot 1 & -2\cdot 0 \\ -2\cdot 1 & -2\cdot 4 & -2\cdot 1 \\ -2\cdot 0 & -2\cdot 1 & -2\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -2 & 0 \\ -2 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Dodawanie macierzy

Macierze o takich samych wymiarach, czyli dwie macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ można dodawać w ten sposób, że dodaje się ich odpowiednie elementy.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{M1} & b_{M2} & \dots & b_{MN} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1N}+b_{1N} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2N}+b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1}+b_{M1} & a_{M2}+b_{M1} & \dots & a_{MN}+b_{MN} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Zbiór macierzy o takich samych wymiarach, wraz z dodawaniem i mnożeniem przez skalar, tworzy przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$).

Copyright © 2020 P. F. Góra

Mnożenie macierzy

Niech będą dane dwie macierze $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times L}$ (to samo dla $\mathbb{C}$) — liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy. Dla takich macierzy możemy określić ich iloczyn

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \tag{5a}$$

będący macierzą o elementach danych wzorem

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \cdot b_{jk}\,, \quad i = 1, \dots, M \;\; k = 1, \dots, L \tag{5b}$$

Formalnie mnożenie macierzy (5b) polega na sumowaniu po drugim wskaźniku pierwszego czynnika i pierwszym wskaźniku drugiego czynnika. W praktyce macierze mnoży się na zasadzie “wiersze przez kolumny”.

Przykłady

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-2) + 2\cdot 5 \\ (-1)\cdot 3 + 4\cdot 1 & (-1)\cdot(-2) + 4\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 22 \end{bmatrix} \tag{6a}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6b}$$

Copyright © 2020 P. F. Góra

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 2 & 3\cdot(-1) + 4\cdot 0 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 2 & 5\cdot(-1) + 6\cdot 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 11 & -3 \\ 17 & -5 \end{bmatrix} \tag{6c}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{działanie nie jest poprawnie zdefiniowane!} \tag{6d}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6e}
$$

Macierze kwadratowe

Jeżeli liczba wierszy macierzy jest równa liczbie jej kolumn, mówimy, że macierz jest *kwadratowa*. Najczęściej, choć nie wyłącznie, będziemy mówić o takich właśnie macierzach, rzeczywistych lub zespolonych.

Macierze kwadratowe $\mathbb{R}^{N\times N}$ ($\mathbb{C}^{N\times N}$) mają N^2 rzeczywistych (zespolonych) elementów.

Macierz jednostkowa

Macierzą jednostkową nazywam macierz kwadratową, która na głównej przekątnej ma same jedynki, a poza główną przekątną same zera.

$$\mathbb{I} = [\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Formalnie istnieją “osobne” macierze jednostkowe dla różnych rozmiarów macierzy kwadratowych: 2×2, 3×3, ...

Macierz jednostkowa jest elementem neutralnym mnożenia macierzy kwadratowych: $\forall N\,, \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N} : \mathbf{A} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Copyright © 2020 P. F. Góra

Delta Kroneckera

Elementy macierzy jednostkowej możemy zapisać w postaci *delty Kroneckera*:

$$\mathbb{I}_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{8}$$

Macierz jednostkowa ma jedynki na głównej przekątnej (numer wiersza równa się numerowi kolumny) i zera na wszystkich pozostałych pozycjach (numer wiersza różni się od numeru kolumny).

Copyright © 2020 P. F. Góra

Mnożenie macierzy jest nieprzemienne!

W ogólności $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 7 \\ 5 & 5 & 7 \end{bmatrix} \tag{9a}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 5 \\ 5 & 7 & 7 \end{bmatrix} \tag{9b}$$

Copyright © 2020 P. F. Góra

Macierze kwadratowe należące do $\mathbb{R}^{N\times N}$ (lub $\mathbb{C}^{N\times N}$) wraz z dodawaniem i mnożeniem macierzy tworzą pierścień (nieprzemienny) z jedynką.

Komutator

Różnicę iloczynów $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}$ nazywamy komutatorem tych macierzy i oznaczamy

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \tag{10}$$

Jeśli mnożenie jakichś dwu macierzy jest przemienne, ich komutator znika. O takich macierzach mówimy, że komutują.

Przykład

Jeśli pierwszą z macierzy w (9a) oznaczymy przez $\mathbf{A}$, drugą przez $\mathbf{B}$, ich komutator wynosi

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 7 \\ 5 & 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 5 \\ 5 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Transpozycja macierzy

Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$. Macierzą transponowaną do macierzy $\mathbf{A}$ nazywam macierz $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{N\times M}$, w której wiersze zamieniają się w kolumny, kolumny zaś w wiersze. Jeśli oznaczymy elementy macierzy $\mathbf{A}$ przez A_{ij}, to

$$A^T_{ij} = A_{ji} \tag{12}$$

Przykłady

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Traspozycja odwraca kolejność mnożenia

Rozważmy mnożenie macierzy kwadratowych. Jeśli przyjrzymy się definicji mnożenia macierzowego (5b) możemy zauważyć, że transpozycja odwraca kolejność czynników. Istotnie, niech $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. Mamy

$$\sum_{j=1}^{N} B^T_{ij} A^T_{jk} = \sum_{j=1}^{N} B_{ji} A_{kj} = \sum_{j=1}^{N} A_{kj} B_{ji} = C_{ki} = C^T_{ik} \tag{13}$$

skąd wnioskujemy, że

$$\mathbf{C}^T = (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \tag{14}$$

Zasadę tę można rozszerzyć na więcej macierzy. Powiedzmy,

$$\left(\mathbf{PQR}^T\right)^T = \left(\mathbf{R}^T\right)^T \mathbf{Q}^T \mathbf{P}^T = \mathbf{R} \mathbf{Q}^T \mathbf{P}^T \tag{15}$$

gdyż $\left(\mathbf{R}^T\right)^T = \mathbf{R}$.

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{16a}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{16b}$$