Fizyka dla firm — Matematyka

10. Wektory

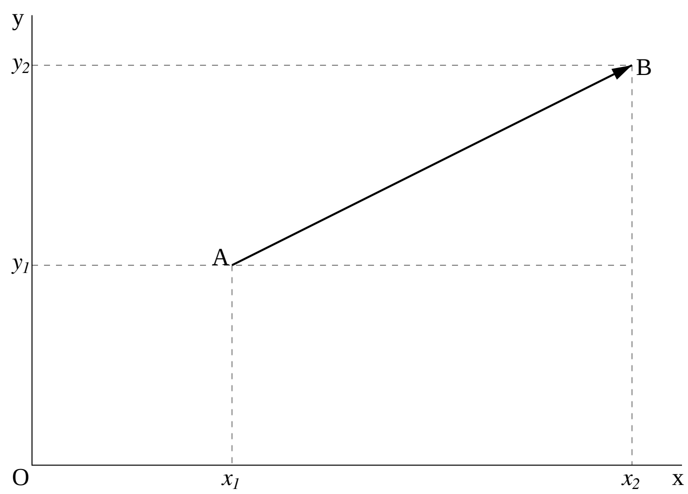
P. F. Góra

`http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/`

12 listopada 2020

Wektor związany

Wektorem związanym nazywamy parę punktów. Jeżeli parę tę stanowią punkty A, B, wektor przez nie utworzony oznaczmy $\overrightarrow{AB}$. Graficznie koniec wektora oznaczamy strzałką. Wektor $\overrightarrow{AB}$ jest różny od wektora $\overrightarrow{BA}$. Wektor o początku i końcu w tym samym punkcie nazywamy *wektorem zerowym*.



Przez pewien czas będziemy się ograniczali do punktów (i wektorów) na płaszczyźnie. Niech punkty A, B mają, odpowiednio, współrzędne kartezjańskie (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Budujemy trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną jest wektor $\overrightarrow{AB}$, a przyprostokątne są równoległe do osi OX, OY. Z twierdzenia Pitagorasa widzimy, iż długość wektora $\overrightarrow{AB}$ jest dana przez

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{1}$$

Długość wektora $\overrightarrow{BA}$ jest taka sama, jak dugość wektora $\overrightarrow{AB}$: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|$.

Długość wektora zerowego wynosi zero.

Przykład

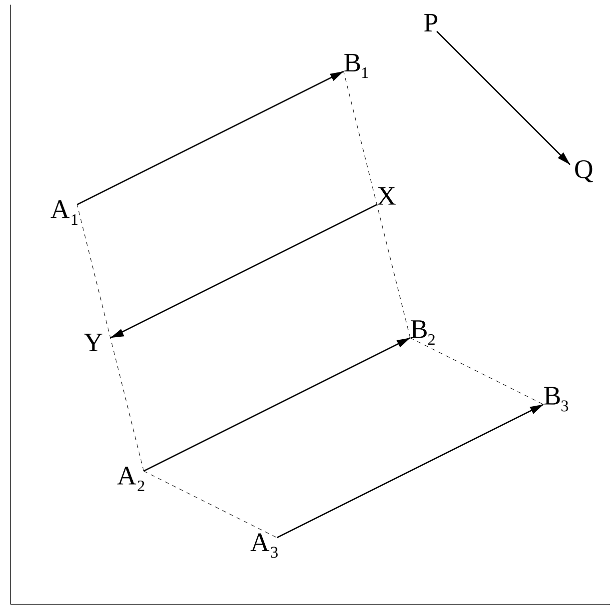
Obliczmy długość wektora, którego początek stanowi punkt P o współrzędnych $(1,3)$, koniec punkt Q o współrzędnych $(3,-1)$.

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| &= \sqrt{(3-1)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{2^2+(-4)^2} = \sqrt{4+16} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Równość wektorów

Mówimy, że dwa wektory są równe, jeśli za pomocą *przesunięcia równoległego* można je nałożyć na siebie, to znaczy doprowadzić do sytuacji, w której początek pierwszego wektora pokrywa się z początkiem drugiego i jednocześnie koniec pierwszego wektora pokrywa się z końcem drugiego.

Rozważmy dwa wektory $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{RS}$. Niech początki i końce tych wektorów mają, odpowiednio, współrzędne $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$, $S(x_4, y_4)$. Zauważmy, że do tego, aby wektory te były równe, potrzeba i wystarcza, aby jednocześnie zachodziły równości $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ oraz $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$.



W pokazanej na rysunku 2 sytuacji, wektory $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{A_3B_3}$ są równe, ale **nie** są równe wektorowi $\overrightarrow{XY}$. Żaden z tych wektorów nie jest równy wektorowi $\overrightarrow{PQ}$.

Łatwo pokazać, iż relacja równości wektorów tworzy *relację równoważnościową*, gdyż

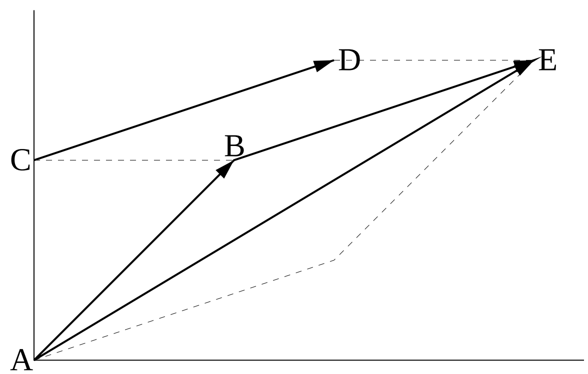
1. jest to relacja zwrotna (każdy wektor jest równy samemu sobie),

2. jest relacją symetryczną (jeżeli $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, to $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ}$),

3. jest relacją przechodnią (gdyż złożenie dwu przesunięć równoległych jest przesunięciem równoległym).

Dodawanie wektorów

Aby dodać dwa wektory związane, wykonujemy następującą operację*: Chcemy obliczyć $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. W tym celu stosujemy następującą regułę równoległoboku:



*Mowimy tu o matematyce. W fizyce określona jest tylko suma wektorów zaczepionych w tym samym punkcie. Oblicza się ją zresztą według tego samego algorytmu, jaki jest omawiany tutaj.

1. *Przesuwamy równolegle* wektor $\overrightarrow{CD}$ tak, aby jego początek pokrył się z końcem wektora $\overrightarrow{AB}$. Koniec przesuniętego wektora oznaczamy przez E.
2. Budujemy równoległobok, którego dwoma bokami są wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$.
3. Sumą wektorów staje się przekątna powstałego równoległoboku, czyli wektor $\overrightarrow{AE}$.

Jak widzimy, przy rozważaniu równości i dodawania wektorów zaczepionych, fakt, iż mają one określone początki i końce, raczej utrudnia, niż ułatwia rozważania.

Wektory swobodne

Korzystając z faktu, iż relacja równości wektorów zaczepionych jest relacją równoważnościową, możemy podzielić cały zbiór wektorów zaczepionych na płaszczyźnie na zbiory wektorów równych (klasy abstrakcji względem relacji równości wektorów). Innymi słowy, *utożsamiamy* wszystkie równe sobie wektory zaczepione. Po utożsamieniu wektorów równych, otrzymujemy *wektory swobodne*. Zwyczajowo przedstawia się je jako zaczepione w początku układu współrzędnych. Wektory swobodne będziemy oznaczać literami półgrubymi.

Wektor swobodny reprezentowany przez strzałkę o początku w środku układu współrzędnych i końcu w punkcie $P(x, y)$ oznaczamy $[x, y]$. Liczby x, y nazywamy składowymi tego wektora.

Działania na wektorach swobodnych

Niech będą dane dwa wektory swobodne $\mathbf{a} = [a_1, a_2]$ i $\mathbf{b} = [b_1, b_2]$. *Sumę wektorów* definiujemy następująco:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]. \tag{3}$$

Zauważmy, że definicja (3) jest zgodna z przedstawioną wyżej regułą równoległoboku!

Niech c będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Mnożenie wektora przez liczbę definiujemy jako

$$c \cdot \mathbf{a} = c \cdot [a_1, a_2] = [c \cdot a_1, c \cdot a_2]. \tag{4}$$

Zauważmy, że wektory $\mathbf{a}$ i $c \cdot \mathbf{a}$ są równoległe.

Przykład

Niech $\mathbf{a} = [1, 2]$, $\mathbf{b} = [-2, 3]$. Obliczmy $2\mathbf{a}$ oraz $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} &= 2 \cdot [1, 2] = [2 \cdot 1, 2 \cdot 2] = [2, 4]. && \text{(5a)} \\ 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= 3 \cdot [1, 2] - 2 \cdot [-2, 3] \\ &= [3 \cdot 1, 3 \cdot 2] + [(-2) \cdot (-2), (-2) \cdot 3] \\ &= [3, 6] + [4, -6] = [3 + 4, 6 - 6] = [7, 0]. && \text{(5b)} \end{aligned}$$

Długość wektora swobodnego

Długością wektora swobodnego $\mathbf{a} = [a_1, a_2]$ jest liczba

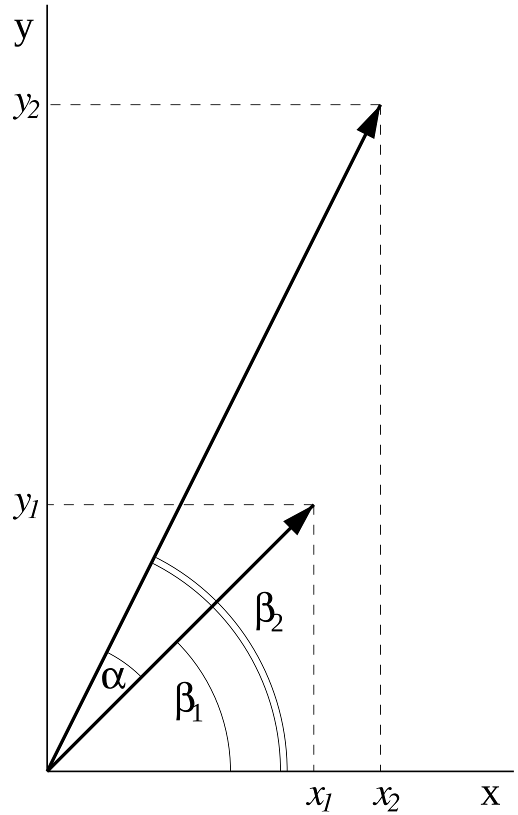
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \tag{6}$$

Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny dwu niezerowych wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ tworzących kąt α, definiuje się jako

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos\alpha. \tag{7}$$

Obliczanie kąta pomiędzy wektorami może być kłopotliwe, dlatego też w praktyce postępujemy inaczej. Rozważmy konstrukcję zaprezentowaną na Rysunku.



Dwa pokazane na rysunku wektory — oznaczmy je odpowiednio $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ — tworzą kąt α. Kąt ten jest różnicą kątów β_2, β_1, jaki wektory $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1$ tworzą z osią OX. Zatem

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 = \|\mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_2\| \cdot \cos\alpha = \|\mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_2\| \cdot \cos(\beta_2 - \beta_1) \\ = \|\mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_2\| \cdot (\cos\beta_2 \cos\beta_1 + \sin\beta_2 \sin\beta_1) \\ = \|\mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_2\| \cdot \left(\frac{x_2}{\|\mathbf{x}_2\|} \cdot \frac{x_1}{\|\mathbf{x}_1\|} + \frac{y_2}{\|\mathbf{x}_2\|} \cdot \frac{y_1}{\|\mathbf{x}_1\|} \right) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, \quad (8)\end{aligned}$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy ze wzoru na kosinus różnicy kątów i z definicji funkcji trygonometrycznych.

Widzimy, że *iloczyn skararny dwu wektorów równa się sumie iloczynów składowych tych wektorów*!

Przykład

Niech $\mathbf{a} = [-3, 2]$, $\mathbf{b} = [1, 4]$. $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = [-3, 2] \circ [1, 4] = (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 4 = -3 + 8 = 5$.

Przykład

Wykażemy, że kąt wpisany w okrąg i oparty na średnicy jest kątem prostym.

Punkty leżące na okręgu o środku w środku układu współrzędnych i o promieniu r spełniają równanie $x^2 + y^2 = r^2$.

Wprowadźmy układ współrzędnych taki, że jego środek pokrywa się ze środkiem okręgu, natomiast wybrana średnica zawarta jest w osi OX. Rozpatrujemy punkty $L(-r, 0)$, $A(x, y)$, $P(r, 0)$, gdzie punkt A leży na okręgu, a zatem $x^2 + y^2 = r^2$. Interesujący nas kąt zawarty jest pomiędzy wektorami $\overrightarrow{LA}$ oraz $\overrightarrow{AP}$. $\overrightarrow{LA} = [x - (-r), y - 0] = [x + r, y]$. $\overrightarrow{AP} = [r - x, 0 - y] = [r - x, -y]$. Obliczam $\overrightarrow{LA} \circ \overrightarrow{AP} = [x + r, y] \circ [r - x, -y] = (r + x) \cdot (r - x) + y \cdot (-y) = r^2 - x^2 - y^2 = r^2 - (x^2 + y^2) = r^2 - r^2 = 0$, co oznacza, że wektory te są prostopadłe.

Wektor kierunkowy prostej

Ogólne równanie prostej na płaszczyźnie ma postać

$$Ax + By + C = 0, \tag{9}$$

przy czym liczby A, B nie mnogą *jednocześnie* być równe zeru. Jeżeli $A = 0$, równanie (9) określa prostą równoległą do osi OX. Jeżeli $B = 0$, równanie to określa prostą równoległą do osi OY.

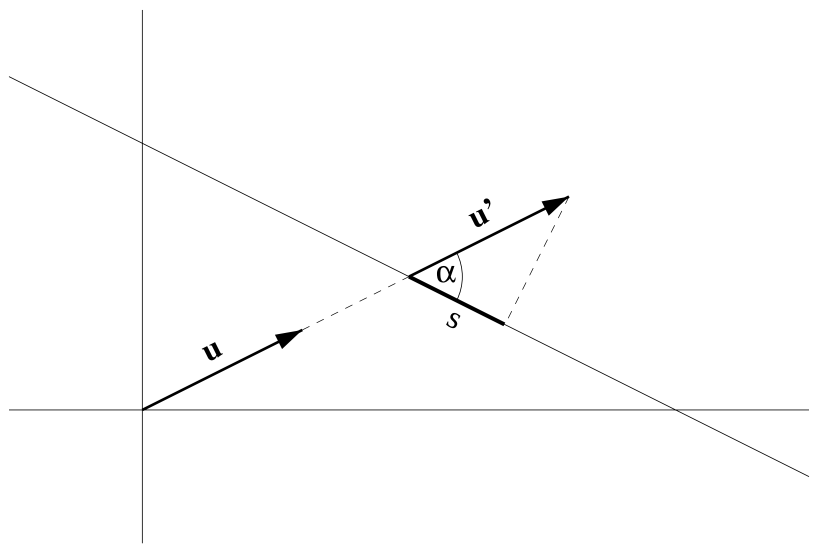
Wektor o współrzędnych $[B, -A]$ jest wektorem równoległym do prostej (9). Wektor ten nazywa się *wektorem kierunkowym* prostej. Dla $A = 0$ lub $B = 0$ powyższe twierdzenie jest oczywiste. Dla $A \neq 0 \neq B$ zauważmy, że punkty $P\left(0, -\frac{C}{B}\right)$, $Q\left(1, -\frac{A+C}{B}\right)$ leżą na prostej (9). Punkty te wyznaczają wektor

$$\overrightarrow{PQ} = \left[1 - 0, -\frac{A+C}{B} - \left(-\frac{C}{B}\right)\right] = \left[1, -\frac{A}{B}\right] = \frac{1}{B} \cdot [B, -A], \qquad (10)$$

który jest równoległy do wektora $[B, -A]$.

Rzut wektora na prostą

Aby obliczyć rzut wektora swobodnego $\mathbf{u}$ na prostą o równaniu (9), postępujemy następująco (patrz rysunek):



1. Przesuwamy wektor $\mathbf{u}$ równolegle[†] tak, aby jego początek znalazł się na danej prostej. Przesunięty wektor oznaczamy $\mathbf{u}'$.
2. Rzut s wektora $\mathbf{u}'$ na prostą obliczamy jako $s = \|\mathbf{u}'\| \cdot \cos\alpha$, gdzie α jest kątem, jaki wektor $\mathbf{u}'$ tworzy z prostą.
3. Wielkość $\cos\alpha$ wyliczamy z iloczynu skalarnego wektora $\mathbf{u}'$ i wektora kierunkowego prostej.

Ostatecznie

$$s = \left\|\mathbf{u}'\right\| \cdot \cos\alpha = \left\|\mathbf{u}'\right\| \cdot \frac{\mathbf{u}' \circ [B, -A]}{\|\mathbf{u}'\| \cdot \|[B, -A]\|} = \frac{\mathbf{u}' \circ [B, -A]}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\mathbf{u} \circ [B, -A]}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{11}$$

[†]Mówiąc bardziej precyzyjnie, wybieramy takiego reprezentanta wektora swobodnego $\mathbf{u}$, którego początek leży na danej prostej.

Wektory wielowymiarowe

O wektorach swobodnych na płaszczyźnie mówimy, że należą do przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Analogicznie definiuje się wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i, ogólnie, w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Jeżeli dane są dwa wektory $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ z przestrzeni $\mathbb{R}^n$, działania na nich definiujemy następująco:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} + \mathbf{b} &= [a_1, a_2, \dots, a_n] + [b_1, b_2, \dots, b_n] \\
&= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n] \qquad (12) \\
c \cdot \mathbf{a} &= c \cdot [a_1, a_2, \dots, a_n] = [c \cdot a_1, c \cdot a_2, \dots, c \cdot a_n], \ c \in \mathbb{R} \qquad (13) \\
\mathbf{a} \circ \mathbf{b} &= [a_1, a_2, \dots, a_n] \circ [b_1, b_2, \dots, b_n] \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Ostatnia z powyższych równości definiuje iloczyn skalarny.

Jeżeli wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ są niezerowe, kosinus kąta między nimi definiuje się jako

$$\cos \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \circ \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \tag{15}$$

Wektory, dla których $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0$, nazywa się wektorami wzajemnie prostopadłymi (ortogonalnymi). Uwaga: ponieważ iloczyn skalarny wektora zerowego z dowolnym innym wektorem znika, uznajemy, że wektor zerowy jest ortogonalny do wszystkich innych wektorów.

Przykład

Dane są dwa wektory z przestrzeni $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{x} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right]$, $\mathbf{y} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Znajdźmy kąt między tymi wektorami.

Zauważmy, że *także* w przestrzeni czterowymiarowej dwa niewspółliniowe wektory wyznaczają płaszczyznę dwuwymiarową.

Z definicji (☺) $\cos\measuredangle(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}\circ\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|}$. Obliczamy

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 1 \tag{16a}$$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 1 \tag{16b}$$

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \tag{16c}$$

Zatem $\cos\measuredangle(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. Wektory te są ortogonalne.