

Fizyka dla firm — Matematyka

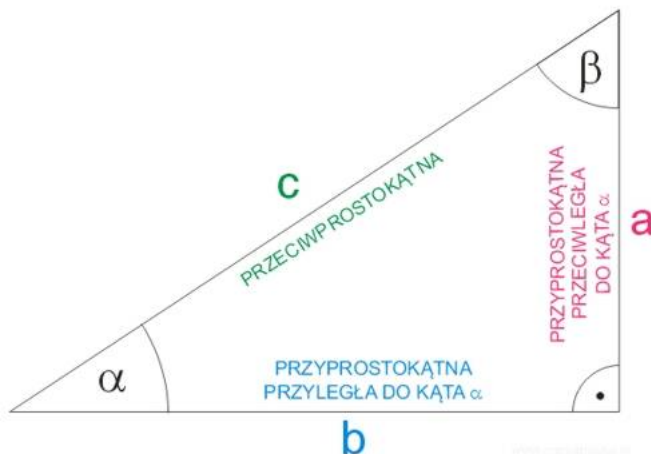
7. Trygonometria

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

2 listopada 2020

Funkcje trygonometryczne



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Zamiast oznaczeń tg , ctg używa się niekiedy oznaczeń anglosaskich \tan , \cot .

Podstawowe tożsamości

Z twierdzenia Pitagorasa

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

Obowiązuje zatem “jedyńska trygonometryczna”

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

Zapis “ $\sin^2 \alpha$ ” interpretujemy jako “ $(\sin \alpha)^2$ ”; podobnie z innymi funkcjami.

Oczywiste są także trzy inne tożsamości:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (2a)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (2b)$$

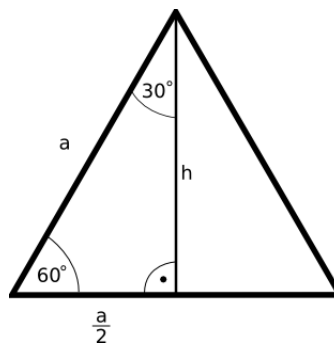
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (2c)$$

Funkcje trygonometryczne $\pi/4$

Rozważając kwadrat o boku jednostkowym, którego przekątna ma długość $\sqrt{2}$, widzimy, że

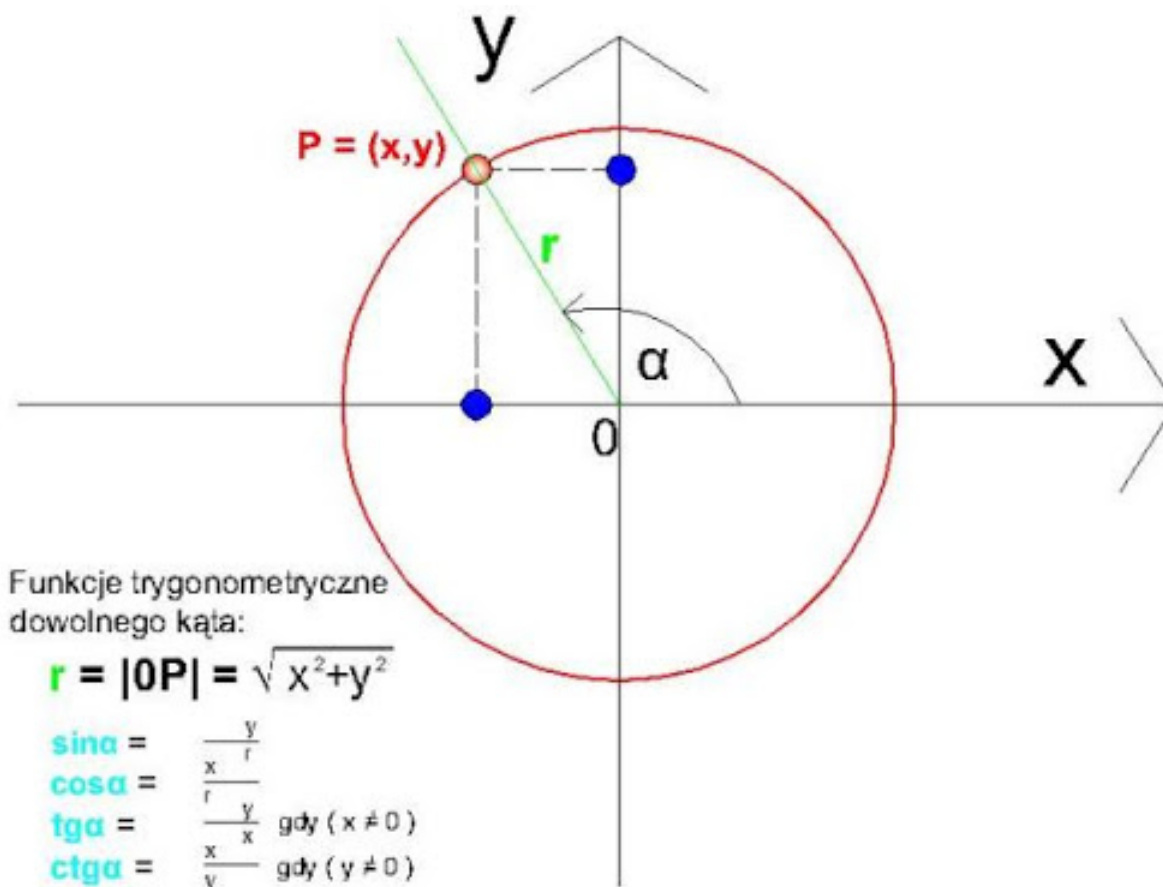
$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^\circ &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Funkcje trygonometryczne $\pi/3, \pi/6$



$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin 30^\circ &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ &= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta



Okresowość funkcji trygonometrycznych

$\forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} :$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad (3a)$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad (3b)$$

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x \quad (3c)$$

$$\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x \quad (3d)$$

Uwaga: argumenty ujemne odpowiadają kątom mierzonym *zgodnie* z ruchem wskazówek zegara.

Parzystość funkcji trygonometrycznych

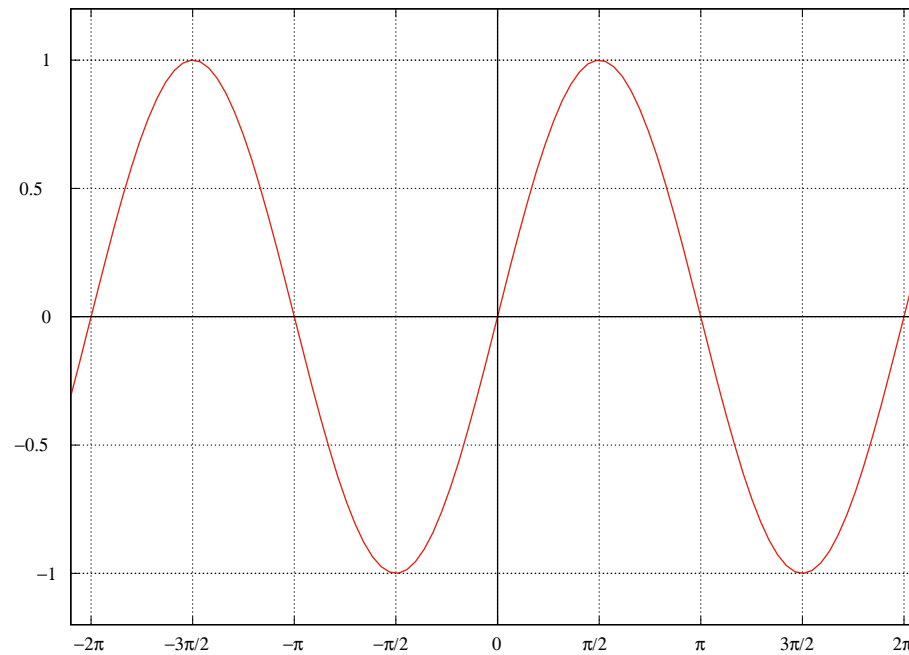
$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin x, & \cos(-x) &= \cos x, \\ \operatorname{tg}(-x) &= -\operatorname{tg} x, & \operatorname{ctg}(-x) &= -\operatorname{ctg} x.\end{aligned}\tag{4}$$

Znaki funkcji trygonometrycznych

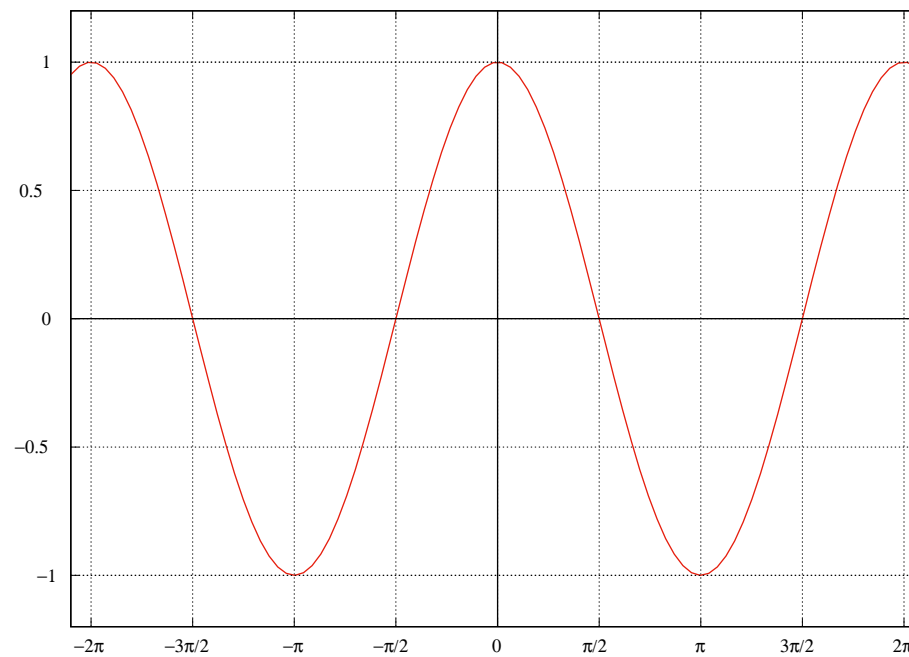
*W pierwszej wszystkie są dodatnie, w drugiej tylko sinus,
W trzeciej tangens i kotangens, a w czwartej kosinus.*



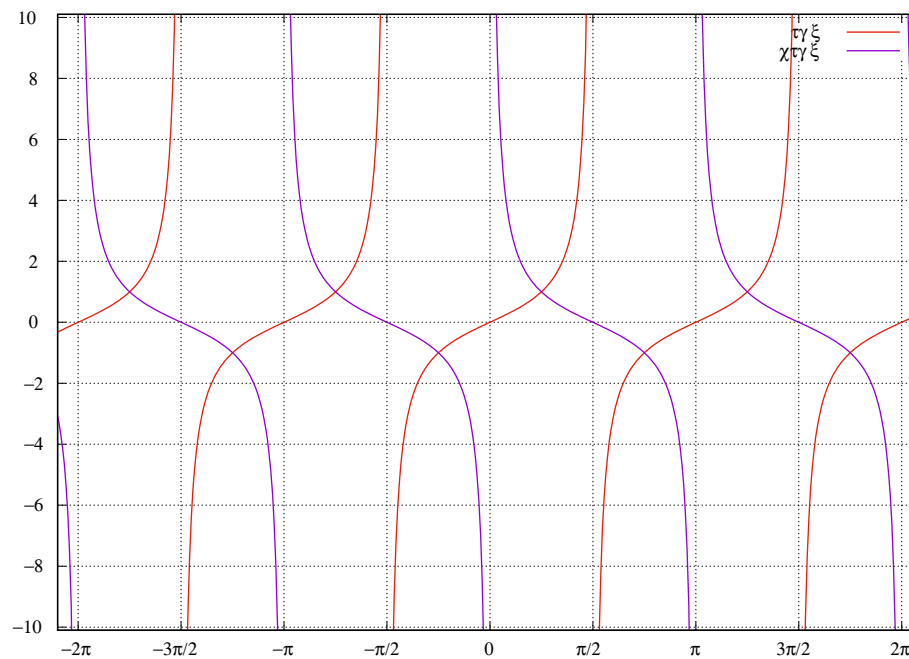
Wykres funkcji sinus



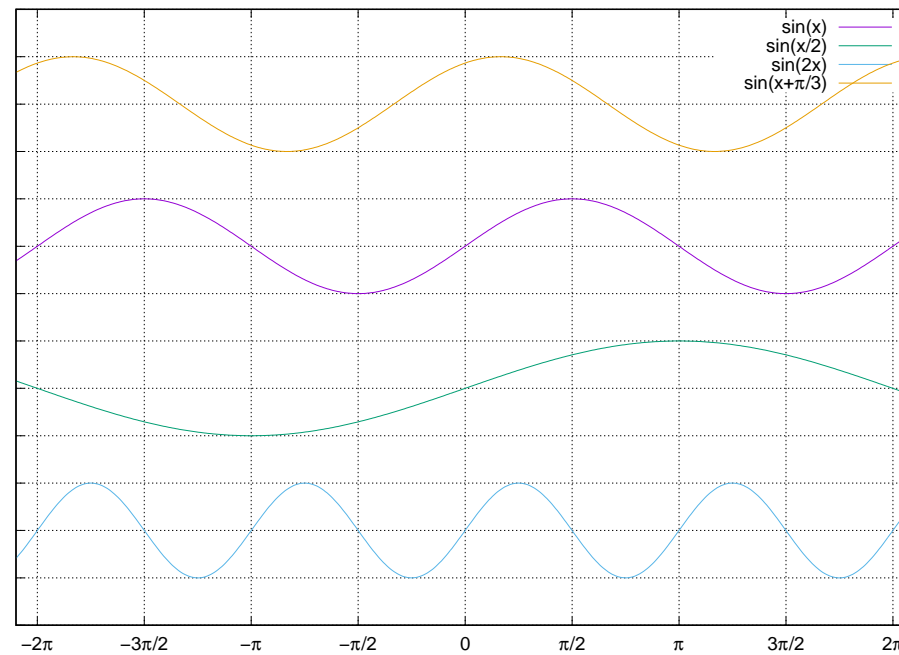
Wykres funkcji kosinus



Wykresy funkcji tangens i kotangens



Zmiana częstotliwości i przesunięcie w fazie



Wzory redukcyjne

$$\begin{aligned}\sin(x + \pi/2) &= \cos x, & \sin(x + \pi) &= -\sin x, \\ \sin(x + 3\pi/2) &= -\cos x, & & \end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned}\cos(x + \pi/2) &= -\sin x, & \cos(x + \pi) &= -\cos x, \\ \cos(x + 3\pi/2) &= \sin x. & & \end{aligned} \tag{5b}$$

Podobnie dla tg , ctg . Nieparzysta wielokrotność $\pi/2$ — funkcja zmienia się na kofunkcję, parzysta wielokrotność $\pi/2$ — funkcja się nie zmienia. Znak ustalamy zgodnie ze znakiem lewej strony zakładając, że x należy do pierwszej ćwiartki.

Korzystając z powyższych wzorów redukcyjnych i parzystości funkcji trygonometrycznych, można wyprowadzać wzory postaci $\sin(k\pi/2 - x)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na przykład

$$\sin(\pi/2 - x) = \sin(\pi/2 + (-x)) = \cos(-x) = \cos x, \quad (6a)$$

$$\cos(\pi - x) = \cos(\pi + (-x)) = -\cos(-x) = -\cos x. \quad (6b)$$

Wzory na funkcje kąta podwojonego

Korzystamy ze wzoru de Moivre'a:

$$e^{2ix} = \cos(2x) + i \sin(2x) \quad (7a)$$

z drugiej strony

$$\begin{aligned} e^{2ix} &= (e^{ix})^2 = (\cos x + i \sin x)^2 \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \sin x \cos x \end{aligned} \quad (7b)$$

Porównując części rzeczywiste i urojone (7a) i (7b) widzimy, że

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad (8a)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (8b)$$

Wzory na funkcje sumy i różnicy kątów

Powyższe wzory można uogólnić:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (9a)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (9b)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (9c)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (9d)$$

Wzorów tych można używać do udowadniania (sprawdzania) rozmaitych tożsamości trygonometrycznych.

Przykłady

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) \\ &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta. \end{aligned} \tag{10a}$$

$$\frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z} = \frac{\frac{\sin y}{\cos y} + \frac{\sin z}{\cos z}}{\frac{\cos y}{\sin y} + \frac{\cos z}{\sin z}} = \frac{\frac{1}{\cos y \cos z}}{\frac{1}{\sin y \sin z}} = \frac{\sin y \sin z}{\cos y \cos z} = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \tag{10b}$$

Funkcje cyklometryczne: funkcje odwrotne do trygonometrycznych

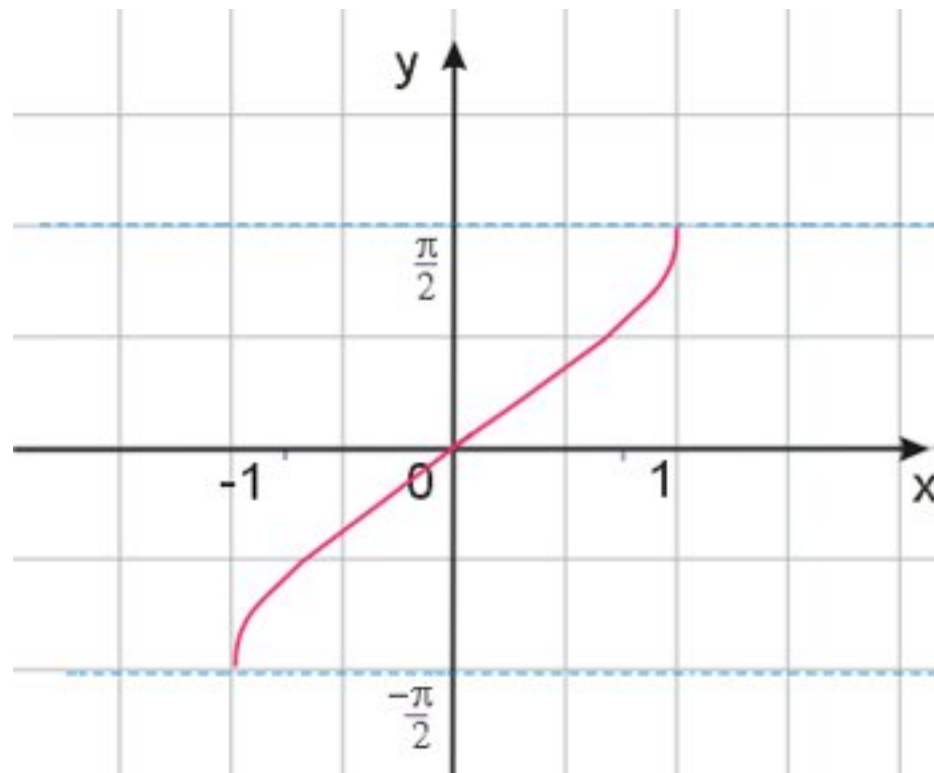
Funkcje trygonometryczne można odwracać tylko w przedziałach, w których funkcje te są monotoniczne (jeżeli funkcja nie jest monotoniczna, nie jest *wzajemnie* jednoznaczna).

Funkcja sinus jest odwracalna w przedziale $[-\pi/2, \pi/2]$:

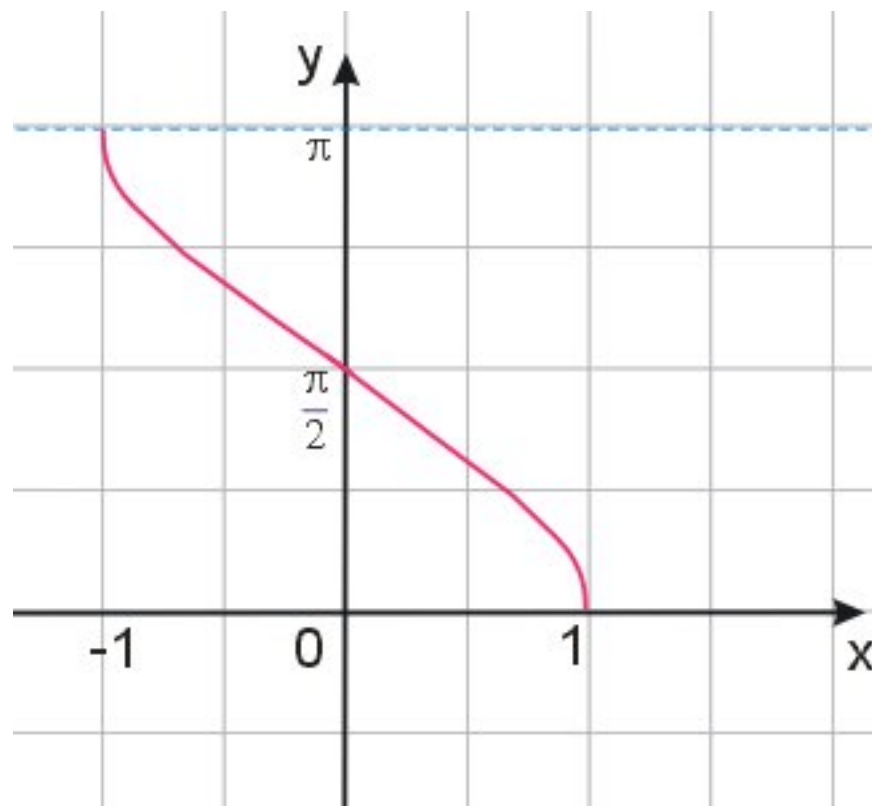
$$y = \arcsin x, y \in [-\pi/2, \pi/2] \Leftrightarrow \exists x \in [-1, 1] : x = \sin y \quad (11)$$

Funkcja kosinus jest odwracalna w przedziale $[0, \pi]$:

$$y = \arccos x, y \in [0, \pi] \Leftrightarrow \exists x \in [-1, 1] : x = \cos y \quad (12)$$



arcus sinus



arcus kosinus

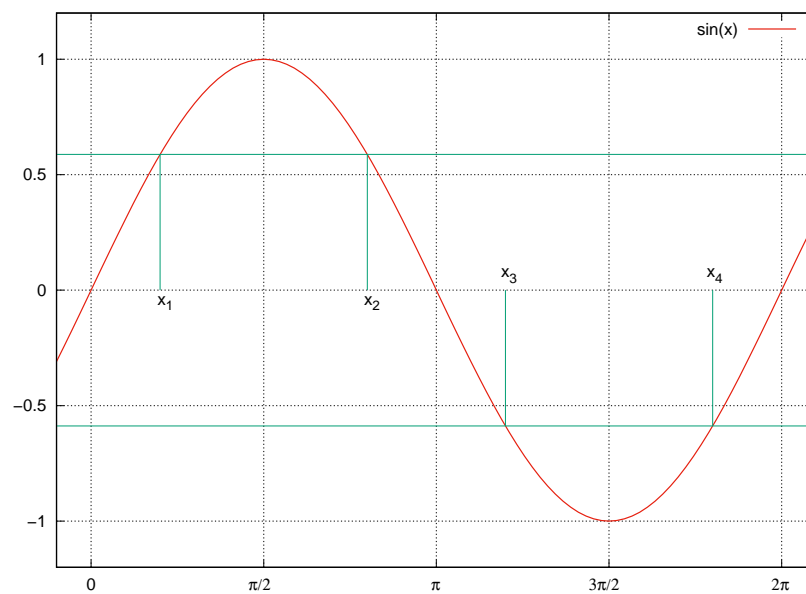
Równania trygonometryczne: sinus

Rozpatrzmy równanie

$$\sin x = z. \quad (13)$$

Jeżeli $|z| > 1$, równanie to nie ma rozwiązania. Jeżeli $z = -1, 0, 1$, rozwiązania są trywialne. Pozostaje rozpatrzeć dwa przypadki.

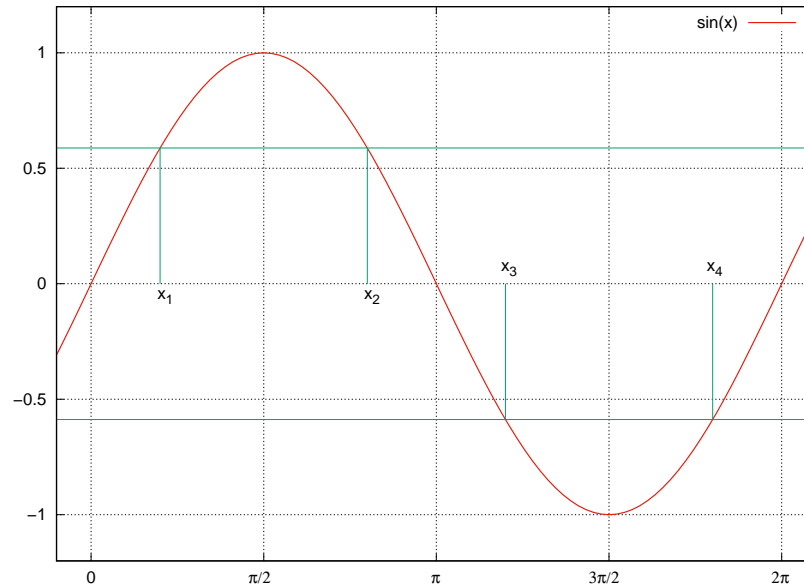
a) $0 < z < 1$.



Z symetrii widzimy, że $\pi - x_2 = x_1$, a zatem ($n \in \mathbb{Z}$)

$$x = \arcsin z + 2n\pi \vee x = \pi - \arcsin z + 2n\pi. \quad (14a)$$

b) $-1 < z < 0$.



Z symetrii wykresu $x_3 = \pi + \arcsin(|z|)$, a także $x_3 - \pi = 2\pi - x_4$, skąd $x_4 = 3\pi - x_3 = \pi - x_3 = -\arcsin(|z|)$; dwie ostatnie równości wynikają z okresowości funkcji sinus. Zatem ($n \in \mathbb{Z}$)

$$x = -\arcsin(|z|) + 2n\pi \vee x = \pi + \arcsin(|z|) + 2n\pi \quad (14b)$$

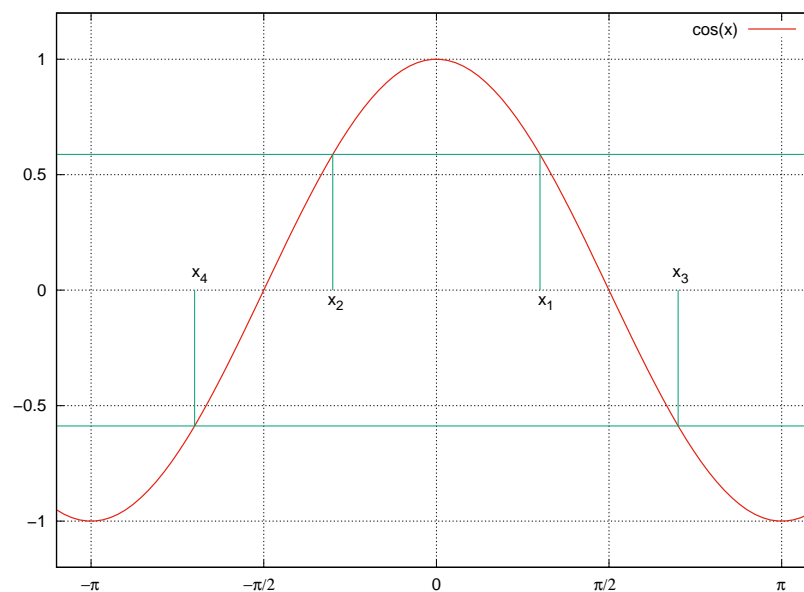
Równania trygonometryczne: kosinus

Rozpatrzmy równanie

$$\cos x = z. \quad (15)$$

Jeżeli $|z| > 1$, równanie to nie ma rozwiązania. Jeżeli $z = -1, 0, 1$, rozwiązania są trywialne. Tak jak poprzednio, pozostaje rozpatrzeć dwa przypadki.

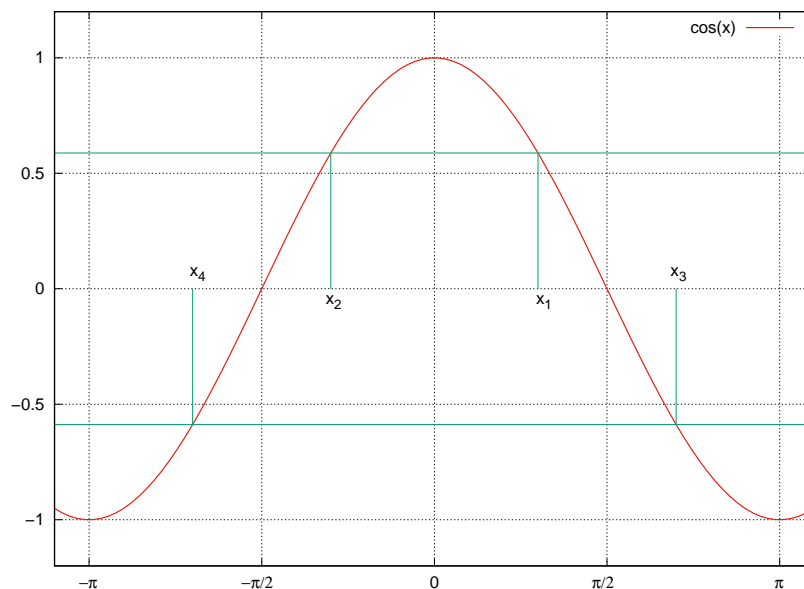
a) $0 < z < 1$.



Mamy $x_1 = \arccos z$, a z parzystości $x_2 = -x_1$. Zatem ($n \in \mathbb{Z}$)

$$x = \arccos z + 2n\pi \vee x = -\arccos z + 2n\pi \quad (16a)$$

b) $-1 < z < 0$.



Z symetrii wykresu $\pi/2 - x_1 = x_3 - \pi/2 \Rightarrow x_3 = \pi - x_1$, natomiast z parzystości $x_4 = -x_3$. Ostatecznie ($n \in \mathbb{Z}$)

$$x = \pi - \arccos(|z|) + 2n\pi \vee x = -\pi + \arccos(|z|) + 2n\pi. \quad (16b)$$

Przykład

Rozwiąż równanie:

$$\cos 2x = -\frac{1}{3} \quad (17a)$$

Oznaczmy $2x = u$. Mamy zatem

$$\cos u = -\frac{1}{3} \quad (17b)$$

Zgodnie ze wzorami (16b)

$$u = \pi - \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2n\pi \vee u = -\pi + \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2n\pi \quad (17c)$$

$$x = \pm \frac{\pi}{2} \mp \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + n\pi \quad (17d)$$

Przykład

$$\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{5} \quad (18a)$$

Skorzystamy ze wzorów na sinus sumy i różnicy kątów:

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{x}{2} &= -\cos\frac{\pi}{5} \\ 2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{x}{2} &= -\cos\frac{\pi}{5} \\ 2\sin\frac{x}{2} &= -1 \\ \sin\frac{x}{2} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Po skorzystaniu ze wzorów (14b)

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ &\vee \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \quad (18b)$$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{3} + 4k\pi \\ &\vee \frac{7\pi}{3} + 4k\pi \end{aligned} \quad (18c)$$