Fizyka dla firm — Matematyka

6. Indukcja matematyczna

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

27 października 2020

Indukcja matematyczna

Indukcja matematyczna jest treścią jednego z aksjomatów teorii liczb naturalnych.

Jeżeli pewna teza

- zachodzi dla jakiegoś $n_0 \in \mathbb{N}$
- z tego, że teza zachodzi dla jakiegoś n wynika, że teza ta zachodzi dla $n+1$

wówczas teza ta zachodzi dla wszystkich naturalnych $n \geqslant n_0$.

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n_0)) \wedge (\forall n : \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \forall n \geqslant n_0 : \mathcal{P}(n)$$

W powyższym wyrażeniu pierwszy duży kwantyfikator **nie** mówi, że dla każdego n zachodzi $\mathcal{P}(n)$, tylko że dla każdego n — każdego, czyli dowolnego, czyli takiego, o którym nie czynimy żadnych dodatkowych założeń — zachodzi implikacja $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$; ta zaś implikacja stanowi część poprzednika szerszej implikacji. A więc, *jeżeli* dla każdego, czyli dowolnego, w żaden inny sposób nie wyspecyfikowanego n, zachodzi ta implikacja, to itd.

Indukcja matematyczna jest jak wchodzenie po drabinie.

1. Musimy stanąć na najniższym szczeblu.
2. Jeżeli wiemy, że z *jakiegoś* szczebla potrafimy wejść na *następny*,

to wiemy, że potrafimy przejść przez całą drabinę: z pierwszego szczebla możemy przejść na drugi, z drugiego na trzeci i tak dalej, aż do nieskończoności.

Przykład 1

Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1a}$$

Dowód: Dla $n = 1$ mamy $L = \sum\limits_{k=1}^{1} k = 1$,
$P = 1 \cdot (1 + 1)/2 = 2/2 = 1 = L$.

Krok indukcyjny. Przyjmujemy, że teza zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$. Obliczamy

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{1b}$$

co kończy dowód, gdyż otrzymaliśmy wyrażenie postaci (1a) z n zastąpionym przez $n{+}1$.

Przykład 2

Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2a}$$

Dowód: Dla $n = 1$ mamy $L = \sum\limits_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$,
$P = 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)/6 = 2 \cdot 3/6 = 6/6 = 1 = L$.

Krok indukcyjny. Przyjmujemy, że teza zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$. Obliczamy

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} \cdot (n(2n+1) + 6(n+1))$$

$$= \frac{n+1}{6} \cdot (2n^2 + 7n + 6) = \ldots$$

Łatwo sprawdzić, że ostatnie wyrażenie w nawiasie $(2n^2 + 7n + 6) = (n+2)(2n+3) = (n+2)(2(n+1)+1)$. Zatem

$$\ldots = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}, \tag{2b}$$

co kończy dowód.

Przykład 3

Niech symbol $a|b$ oznacza, że liczba całkowita a jest podzielnikiem liczby całkowitej b. Udowodnij, że dla $n \geqslant 0$

$$2|\left(n^2 - n\right) \tag{3a}$$

Dowód: Dla $n = 1$, $n^2 - n = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, co jest podzielne przez 2. Przyjmijmy, że dla pewnego $n \geqslant 1$, $n^2 - n = 2s$, gdzie s jest jakąś liczbą naturalną.

$$(n+1)^2-(n+1) = n^2+2n+1-n-1 = n^2-n+2n = 2s+2n = 2(s+n) \tag{3b}$$

co jest podzielne przez 2.

Przykład 4

Udowodnij, że

$$3|\left(n^3 - n\right) \tag{4a}$$

Dowód: Pierwszy krok dowodu indukcyjnego wygląda tak samo, jak w przykładzie poprzednim, więc go pominiemy. Przyjmujemy, że dla pewnego $n \geqslant 1$, $n^3 - n = 3s$, gdzie s jest jakąś liczbą naturalną.

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n = 3s + 3n^2 + 3n = 3(s + n^2 + n) \end{aligned} \tag{4b}$$

Przykład 4

Dany jest ciąg Fibonacciego: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Udowodnij, że

$$2 | a_{3n} \tag{5a}$$

Dowód: Jak łatwo wyliczyć, $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$, a więc teza dla $n = 1$ zachodzi. Zakładamy, że zachodzi ona dla jakiegoś $n \geqslant 1$, $a_{3n} = 2s$. Wówczas

$$\begin{aligned} a_{3(n+1)} &= a_{3n+3} = a_{3n+2} + a_{3n+1} = \underbrace{a_{3n+1} + a_{3n}}_{a_{3n+2}} + a_{3n+1} \\ &= 2a_{3n+1} + a_{3n} = 2a_{3n+1} + 2s = 2(a_{3n+1} + s) \end{aligned} \tag{5b}$$

Przykład 6 — wzór dwumianowy Newtona

Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{6a}$$

(wzór dwumianowy Newtona).

Dowód: Udowodnimy tylko pierwszą z powyższych nierówności; dowód drugiej będzie w tej sytuacji trywialny. Dodówd przeprowadzimy indukcyjnie.

Dla $n = 0$, lewa i prawa strona dają jeden, a więc teza zachodzi. Przyjmujemy założenie indukcyjne, iż teza (6a) zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$. Przekształcamy wyrażenie

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} = \dots
\end{aligned}
\tag{6b}
$$

Jak widać, wydzieliliśmy początkowy (zerowy) i ostatni ($n+1$) wyraz przekształcanej sumy. W pozostałej części “niepokoi” nas człon $n+1$ w górnym poziomie symbolu Newtona. Aby można się go było pozbyć, zaczniemy od *przenumerowania* wyrazów szeregu: zamiast sumować po k od 1 do n, możemy sumować po zmiennej l od 0 do $n-1$. Innymi słowy, przyjmujemy, że $k = l + 1$, oraz l przebiega zakres od 0 do $n - 1$. **Zmiana górnej**

granicy sumowania nie zmienia wyrażeń zawierających n w sumowanym wyrażeniu! Otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\ldots &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n+1}{l+1} a^{l+1} b^{n+1-(l+1)} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \left[\binom{n}{l} + \binom{n}{l+1} \right] a^{l+1} b^{n-l} = \ldots
\end{aligned}
\tag{6c}
$$

gdzie skorzystaliśmy z pewnej tożsamości przedstawionej na poprzednim wykładzie. Otrzymujemy dalej

$$\ldots = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^{l+1} b^{n-l} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l+1} a^{l+1} b^{n-l} \tag{6d}$$

W drugiej z powyższych sum ponownie zmieniamy sposób numerowania wyrazów — przyjmujemy, że $l = k - 1$, gdzie k przebiega zakres od 0 do n (jest to powrót do pierwotnego sposobu numerowania). Zatem

$$
\begin{aligned}
\ldots &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^{l+1} b^{n-l} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-(k-1)} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + a \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^l b^{n-l} + b \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^l b^{n-l} + a^n \right)} + b \underbrace{\left(b^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right)} = \ldots
\end{aligned}
\tag{6e}
$$

gdzie najpierw wyciągnęliśmy wspólne czynniki przed znaki sumy, a później wyciągnęliśmy wspólne czynniki przed nawias. Zauważmy, że wyraz a^n jest “brakującym”, n-tym wyrazem pierwszej sumy. Podobnie b^n jest “brakującym”, zerowym wyrazem drugiej sumy. Zatem

$$
\begin{aligned}
\ldots &= a \cdot \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} a^l b^{n-l} + b \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a \cdot (a+b)^n + b \cdot (a+b)^n = (a+b)^{n+1}
\end{aligned} \tag{6f}
$$

co kończy dowód.

Kolejne przykłady

Następujące tożsamości

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n , \tag{7a}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 , \quad n \geqslant 1 \tag{7b}$$

także można udowodnić indukcyjnie. Skoro jednak mamy już udowodniony wzór dwumianowy Newtona (6a), możemy je udowodnić bardzo prosto, w pierwszym przypadku podstawiając $a = 1$, $b = 1$, w drugim $a = 1$, $b = -1$ ☺