

Fizyka dla firm — Matematyka

5. Ciągi, sumy i tak dalej

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

22 października 2020

Ciągi

Mówiąc nieformalnie, ciąg to sposób ponumerowania jakichś obiektów.

Mówiąc formalnie, ciąg to odwzorowanie (pod)zbioru liczb naturalnych w jakiś inny zbiór. Jeśli ten zbiór jest zbiorem liczbowym, mówimy o ciągu liczbowym.

Zazwyczaj początkowemu wyrazowi ciągu przypisuje się numer 0 lub 1.

Ciąg *skończony*, o wyrazach od a_1 do a_N oznacza się $\{a_n\}_{n=1}^N$. Ciąg *nie-skończony*, o początkowym wyrazie a_1 , oznacza się $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Oczywiście zamiast litery “ a ” można użyć dowolnej innej litery.

Przykłady

$$a_n = 2n; a_n = n^2; a_n = \frac{1}{n}; a_n = \frac{n-1}{n+1}; a_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Pytanie: Czy wszystkie powyższe ciągi można numerować od 0?

Uwaga: zamiast podawać jawny wzór na n -ty wyraz ciągu, ciągi można także definiować rekurencyjnie, podając wyraz początkowy i sposób obliczania kolejnego wyrazu z wyrazów poprzednich, na przykład

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (1)$$

Ciągi monotoniczne

Dany jest ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jeżeli

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n \quad (2)$$

ciąg ten nazywamy rosnącym. Jeżeli natomiast

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n \quad (3)$$

ciąg nazywamy malejącym. Jeśli nierówności w powyższych wyrażeniach są silne, mówimy, odpowiednio, o ciągu silnie (lub: ściśle) rosnącym/malejącym.

Definicje te łatwo uogólnić na przypadek ciągów skończonych.

Jeżeli

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n \quad (4)$$

ciąg nazywamy ciągiem stałym.

Ciąg arytmetyczny

Ciąg arytmetyczny to ciąg, który spełnia

$$\exists r \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + r \quad (5)$$

Łatwo udowodnić następujące wzory (S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów):

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \quad (6a)$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad n \geq 2 \quad (6b)$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \quad (6c)$$

$$S_n = n \cdot \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \quad (6d)$$

Ciąg geometryczny

Ciąg geometryczny to ciąg, który spełnia

$$\exists q \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = q \cdot a_n \quad (7)$$

Łatwo udowodnić następujące wzory (S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów):

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1 \quad (8a)$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad n \geq 2 \quad (8b)$$

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad q \neq 1 \quad (8c)$$

Z ostatniego wyrażenia wynika, że jeżeli $|q| < 1$, suma wszystkich (nie-skończenie wielu) wyrazów ciągu geometrycznego istnieje, jest skończona i wynosi $S_\infty = a_1 / (1 - q)$.

Przykład

Czemu równa się liczba o rozwinięciu dziesiętnym składającym się z nieskończenie wielu cyfr 9?

$$x = 0.\underbrace{999999999999999999999999999999}_{\text{nieskończenie wiele dziewiątek}} \dots \quad (9)$$

Zauważmy, że ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych liczby x

$$x_1 = 0.9 \quad (10a)$$

$$x_2 = 0.99 \quad (10b)$$

$$x_3 = 0.999 \quad (10c)$$

$$x_4 = 0.9999 \quad (10d)$$

...

stanowi ciąg sum początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o $a_1 = 0.9$ i $q = 0.1$:

$$x_1 = a_1 = 0.9 \quad (11a)$$

$$a_2 = 0.1 \cdot 0.9 = 0.09 \Rightarrow x_2 = x_1 + a_2 = 0.9 + 0.09 = 0.99 \quad (11b)$$

$$a_3 = 0.1 \cdot 0.09 = 0.009 \Rightarrow x_3 = x_2 + a_3 = 0.99 + 0.009 = 0.999 \quad (11c)$$

$$a_4 = 0.1 \cdot 0.009 = 0.0009 \Rightarrow x_4 = x_3 + a_4 = 0.999 + 0.0009 = 0.9999 \quad (11d)$$

...

Zatem rozwinięcie dziesiętne liczby x do n cyfr

$$x_n = 0.\underbrace{9999999999}_{n \text{ dziewiątek}} \quad (12)$$

jest równe

$$x_n = 0.9 \cdot \frac{1 - (0.1)^n}{1 - 0.1} = 0.9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{0.9} = 1 - \frac{1}{10^n} \quad (13)$$

Dla $n \rightarrow \infty$ ostatni wyraz znika i $x = x_\infty = 1$.

Ciąg Fibonacciego

Ciąg Fibonacciego zdefiniowany jest następująco:

$$f_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ f_{n-2} + f_{n-1} & n \geq 3 \end{cases} \quad (14)$$

Początkowe wyrazy ciągu Fibonacciego wynoszą $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, \dots\}$. Kolejne wyrazy tego ciągu nazywa się liczbami Fibonacciego.

Ciąg Fibonacciego ma duże znaczenie w kombinatoryce, geometrii (sic!), obliczeniach numerycznych i różnych zagadnieniach “teoretycznych”.

Symbol sumy, Σ

Niech będzie dany ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Do określenia sum wyrazów tego szeregu używa się symbolu Σ .

$\sum_{k=1}^N a_k$ — suma wyrazów do a_1 do a_N .

$$\sum_{n=1}^4 a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\sum_{n=1}^6 \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

$$\sum_{l=2}^7 b_l = b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7$$

Uwagi

1. Wskaźnik sumowania jest “martwy”, wskaźnik sumowania jest tylko oznaczeniem, można go przemianować:

$$\sum_{k=1}^N a_k \equiv \sum_{l=1}^N a_l = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N \quad (15)$$

2. Sumę można rozbić na części:

$$\sum_{k=1}^N a_k \equiv \left(\sum_{k=1}^M a_k \right) + \left(\sum_{k=M+1}^N a_k \right), \quad M < N \quad (16)$$

3. Z sumy można wydzielić jakieś wyrazy, na przykład pierwszy lub ostatni:

$$\sum_{l=1}^N b_l = b_1 + \left(\sum_{l=2}^{N-1} b_l \right) + b_N \quad (17)$$

4. Wskaźnik można “przesunąć”:

$$\sum_{k=1}^N a_k \equiv \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} \quad (18)$$

Zwróćmy uwagę, że po rozwinięciu wyrażen sumowanych, po obu stronach (18) pojawią się **dokładnie te same wyrazy**.

Iloczyn, \prod

Podobnie można zdefiniować iloczyn wyrazów jakiegoś ciągu:

$$\prod_{n=1}^N a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{N-1} \cdot a_N \quad (19)$$

Sumy i iloczyny nieskończone

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest nieskończony, można definiować sumy i iloczyny nieskończone:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

* * *

Wzory skróconego mnożenia

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (20)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (21)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad (22)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (23)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (24)$$

Czy te wzory można jakoś uogólnić?

Silnia

Dla $n \in \mathbb{N}$:

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \cdot (n - 1)! & n \geq 1 \end{cases} \quad (25)$$

Dla $n > 1$: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

$0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 3 \cdot 2 = 6$, $4! = 4 \cdot 6 = 24$,
 $5! = 5 \cdot 24 = 120$, $6! = 6 \cdot 120 = 720$, ...

Symbol Newtona

Niech $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (26)$$

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!(3-0)!} = \frac{3!}{3!} = 1$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

Trójkąt Pascala

Wartości symbolu Newtona można odczytać z tablicy, zwanej trójkątem Pascala

$n = 0$						1							
$n = 1$					1		1						
$n = 2$				1		2		1					
$n = 3$			1		3		3		1				
$n = 4$		1		4		6		4		1			
$n = 5$		1		5		10		10		5		1	
$n = 6$	1		6		15		20		15		6		1

.....

Na brzegach zawsze są jedynki. Począwszy od wiersza $n = 2$, wewnętrzne pozycje są sumami elementów stojących nad nimi.

Własności symbolu Newtona

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad (27)$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad k < n, \quad (28)$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \cdot \frac{k+1}{n+1}. \quad (29)$$

Dla przykładu sprawdźmy równość (27):

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad (30)$$

Wzór dwumianowy Newtona

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .\end{aligned}\tag{31}$$

Ostatnia równość wynika wprost z (27).

Przykłady

Łatwo sprawdzić, że wzory skróconego mnożenia $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$ są zgodne ze wzorem (31).

Korzystając z trójkąta Pascala, odczytajmy ze wzoru dwumianowego Newtona (31) wyrażenie na $(a + b)^5$:

$$\begin{aligned}(a + b)^5 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} a^{5-k} b^k \\ &= \binom{5}{0} a^{5-0} b^0 + \binom{5}{1} a^{5-1} b^1 + \binom{5}{2} a^{5-2} b^2 + \binom{5}{3} a^{5-3} b^3 \\ &\quad + \binom{5}{4} a^{5-4} b^4 + \binom{5}{5} a^{5-5} b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5. \quad (32)\end{aligned}$$