Fizyka dla firm — Matematyka

4. Liczby

P. F. Góra
http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

19 października 2020

Liczby naturalne

Liczby naturalne: $0, 1, 2, 3, \ldots$. (To, czy zero jest naturalne, jest kwestią umowy.) Zbiór liczb naturalnych oznaczam przez $\mathbb{N}$.

Zbiór liczb naturalnych zdefiniowany jest przez odpowiednie aksomaty (aksjomaty Peano (właściwie: Peana)), których nie będziemy tu omawiać ☺

Liczby całkowite

Liczby naturalne i liczby przeciwne do nich: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$. Widać, że zbiór liczb całkowitych można ustawić w ciąg, czyli *ponumerować* za pomocą liczb naturalnych. Jest to bijekcja. Widzimy więc, że zbiór liczb całkowitych jest **równoliczny** ze zbiorem liczb naturalnych. Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych nazywam **zbiorami przeliczalnymi**, a ich moc oznacza się symbolem $\aleph_0$. Zbiór liczb całkowitych oznaczam symbolem $\mathbb{Z}$.

Liczby wymierne

Rozpatruję ułamki, czyli wyrażenia postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Jeżeli m, n mają wspólny czynnik, to znaczy $\exists k, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$: $m = k \cdot p \wedge n = k \cdot q$, mówimy, że ułamki $\frac{m}{n}$ i $\frac{p}{q}$ są sobie równe:

$$\frac{m}{n} = \frac{k \cdot p}{k \cdot q} = \frac{p}{q} \tag{1}$$

Jeżeli takie k nie istnieje, o ułamku mówimy, że jest nieskracalny, a jego licznik i mianownik są względnie pierwsze. Zbiór wszystkich możliwych ułamków nazywam zbiorm liczb wymiernych i oznaczamy $\mathbb{Q}$. Liczby wymierne mają skończone lub okresowe rozwinięcia dziesiętne.

Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny

Aby to udowodnić, zacznijmy od dowodu, że zbiór dodatnich liczb wymiernych jest przeliczalny. W tym celu ustawmy wszystkie dotatnie ułamki w tablicę postaci

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
\tag{2}
$$

Na kolejnych przekątnych leżą ułamki o stałej sumie licznika i mianownika, każda taka przekątna składa się ze skończenie wiele takich ułamków. Każdy ułamek leży na jakiejś przekątnej. Dlatego układając kolejno ułamki najpierw z pierwszej przekątnej, potem z drugiej, potem z trzeciej i tak dalej, ustawimy liczby wymierne dodatnie w ciąg (z powtórzeniami):

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \tag{3}$$

Teraz, jak w wypadku liczb całkowitych, wstawiamy liczby ujemne za ich dodatnimi odpowiednikami.

Liczby rzeczywiste

Nie wszystkie liczby są wymierne! Przykład: rozpatrzmy $\sqrt{2}$, czyli nieujemną liczbę o tej własności, że $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$. Dowód nie wprost: Przyjmijmy, że $\exists m,n\in\mathbb{N}:\ \sqrt{2}=\frac{m}{n}$ i ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny. Mamy

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \tag{4a}$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \tag{4b}$$

$$2n^2 = m^2 \tag{4c}$$

Liczba m^2 jest parzysta, a zatem także liczba m jest parzysta: $\exists k\in\mathbb{N}:$ $m=2k$. Mamy więc

$$2n^2 = (2k)^2 \tag{4d}$$

$$2n^2 = 4k^2 \tag{4e}$$

$$n^2 = 2k^2 \tag{4f}$$

Widzimy, że także liczba n^2 jest parzysta, a więc liczba n jest parzysta, $\exists l \in \mathbb{N} : n = 2l$. Ostatecznie $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l}, k, l \in \mathbb{N}$, co jest *sprzeczne* z założeniem, że ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny.

Liczby, które nie są wymierne, nazywamy liczbami niewymiernymi. Liczby niewymierne mają nieskończone, nieokresowe rozwinięcia dziesiętne. Sumę mnogościową zbioru liczb niewymiernych i wymiernych nazywa się **zbiorem liczb rzeczywistych** i oznacza $\mathbb{R}$. (Niezbyt precyzyjnie) zbiór liczb rzeczywistych można zdefiniować jako zbiór granic wszystkich możliwych ciągów zbieżnych o wyrazach wymiernych. Zachodzi

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}. \tag{5}$$

Można udowodnić, że zbioru liczb rzeczywistych **nie da się** ustawić w ciąg, ponumerować. Zbiór liczb rzeczywistych jest **nieprzeliczalny**.

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, wymiernych i niewymiernych, które są pierwiastkami równań wielomianowych o współczynnikach wymiernych, nazywamy zbiorem liczb algebraicznych. $\sqrt{2}$ jest liczbą algebraiczną. Zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny. Liczby niewymierne niebędące pierwiastkami takich równań nazywa się liczbami przestępnymi. Najbardziej znanymi liczbami przestępnymi są π i podstawa logarytmów naturalnych, e. Zbiór liczb przestępnych jest nieprzeliczalny.

Działania na liczbach rzeczywistych

Niech $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Dodawanie jest przemienne:

$$x + y = y + x \tag{6}$$

Dodawanie jest łączne:

$$x + (y + z) = (x + y) + z \tag{7}$$

Ćwiczenie: Udowodnij, że $x + (y + z) = (x + z) + y$. Dowód:

$$\begin{aligned}
x + (y + z) &= (y + z) + x \quad \text{(przemienność)} && \text{(8a)}\\
(y + z) + x &= y + (z + x) \quad \text{(łączność)} && \text{(8b)}\\
y + (z + x) &= (x + z) + y \quad \text{(przemienność)} && \text{(8c)}\\
x + (y + z) &= (x + z) + y && \text{(8d)}
\end{aligned}$$

Mnożenie jest przemienne:

$$x \cdot y = y \cdot x \tag{9}$$

Mnożenie jest łączne:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \tag{10}$$

Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \tag{11}$$

Kolejność działań

Mnożenie i dzielenie mają taki sam priorytet. Priorytet ten jest wyższy, niż dodawania i odejmowania, które z kolei mają równy sobie priorytet. (Odejmowanie to dodawanie liczb ujemnych.) Napis $a + b \cdot c$ interpretujemy jako $a + (b \cdot c)$. Dla uniknięcia niejednoznaczności należy stosować nawiasy; wyrażenie w nawiasie oblicza się najpierw.

Przykład:

$$2 + 4 : 3 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} + \frac{4}{3} = \frac{10}{3} \tag{12a}$$

ale

$$(2 + 4) : 6 = 6 : 6 = 1 \tag{12b}$$

Uwaga: Zdecydowanie odradzam stosowania "szkolnego" zapisu $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$, gdyż to ostatnie można łatwo pomylić z $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Liczby zespolone

Definicja: $\mathbb{C}$ — zbiór par liczb rzeczywistych

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) \colon\ x, y \in \mathbb{R}\}\,, \tag{13}$$

w którym określono następujące działania:
dodawanie

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \underset{\text{df}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{14}$$

mnożenie

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \underset{\text{df}}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{15}$$

Elementy zbioru $\mathbb{C}$ z tak określonymi działaniami nazywamy *liczbami zespolonymi.*

Liczby rzeczywiste

Zauważmy, że liczby zespolone postaci $(x, 0)$ dodają się i mnożą tak, jak liczby rzeczywiste:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0 + 0) = (x_1 + x_2, 0) \tag{16a}$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2 - 0 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0) = (x_1 x_2, 0) \tag{16b}$$

Wobec tego liczby zespolone postaci $(x, 0)$ będziemy utożsamiać z liczbami rzeczywistymi x. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Liczby urojone

Obliczmy teraz $(0,1)^2$.

$$(0,1)^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 0\cdot 1) = (-1,0) \tag{17}$$

Liczbę zespoloną $(-1,0)$ utożsamiliśmy z liczbą rzeczywistą -1. Oznaczmy

$$(0,1) = i \tag{18}$$

Mamy zatem

$$i^2 = -1 \tag{19}$$

Liczby zespolone postaci $(0,x)$ nazywamy liczbami urojonymi. Kwadraty liczb urojonych są *ujemnymi* liczbami rzeczywistymi.

Tradycyjna reprezentacja liczb zespolonych

Liczbę zespoloną $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ najczęściej przedstawia się w postaci

$$z = x + iy\,, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{20}$$

Jeśli $z = x+iy$, $x = \text{Re}\, z$ nazywa się *częścią rzeczywistą*, natomiast $y = \text{Im}\, z$ nazywa się *częścią urojoną* liczby zespolonej z. $z = (\text{Re}\, z)+i(\text{Im}\, z)$.

Takie przedstawienie jest zgodne z podaną definicją mnożenia: Niech $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Wówczas

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) + i^2 y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Liczby zespolone tworzą ciało

1. Dodawanie jest łączne:
   $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\colon (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3$.
2. Istnieje element neutralny dodawania:
   $\forall z \in \mathbb{C}\colon z + 0 = 0 + z = z$, gdzie $0 \equiv (0, 0) \in \mathbb{C}$.
3. Istnieje element odwrotny względem dodawania:
   $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists -z \in \mathbb{C}\colon z + (-z) = -z + z = 0$.
4. Mnożenie jest łączne:
   $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\colon (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$.
5. Istnieje element neutralny mnożenia:
   $\forall z \in \mathbb{C}\colon z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$, gdzie $1 \equiv (1, 0) \in \mathbb{C}$.
6. Istnieje element odwrotny względem mnożenia:
   $\forall z =\in \mathbb{C}, z \neq 0\ \exists z^{-1} \in \mathbb{C}\colon z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.
7. Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania:
   $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\colon z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Ponadto

8. Dodawanie jest przemienne:
   $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\colon z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
9. Mnożenie jest przemienne:
   $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\colon z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Mówimy, że liczby zespolone wraz z określonymi na nich działaniami tworzą *ciało przemienne*.

Uwaga!

W ciele liczb zespolonych *nie jest określona* naturalna relacja porządkująca.

Jeśli $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, napisy $z_1 < z_2$, $z_1 > z_2$ w ogólności *nie mają sensu!*

Równość liczb zespolonych

Równość liczb zespolonych oznacza *jednoczesną* równość ich części urojonych i rzeczywistych.

Przykład 1 $x + iy = 2 + 3i \Leftrightarrow x = 2, y = 3$.

Przykład 2 Znaleźć liczby rzeczywiste a, b, takie, że $a(2 + 3i) + b(4 - 5i) = 6 - 2i$. Porządkując wyrazy po lewej stronie znajdujemy $2a + 4b + i(3a - 5b) = 6 - 2i$, a zatem otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 2a + 4b & = & 6 \\ 3a - 5b & = & -2 \end{cases}$$

(Rozwiązaniem jest $a = 1$, $b = 1$.)

Moduł i sprzężenie zespolone

Niech $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$.

Modułem liczby z nazywam liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Liczbą sprzężoną do z nazywam liczbę zespoloną $\bar{z} = z^* = x - iy$.

Zauważmy, że $z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ oraz $|z| = |z^*|$.

Przykład $z = 3 + 4i$, $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, $z^* = 3 - 4i$.

Przykłady

1. Usunąć część urojoną z mianownika i znaleźć moduł liczby $u = \dfrac{1}{1+2i}$. Rozwiązanie:

$$u = \frac{1}{1+2i} = \frac{1}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}\,.$$

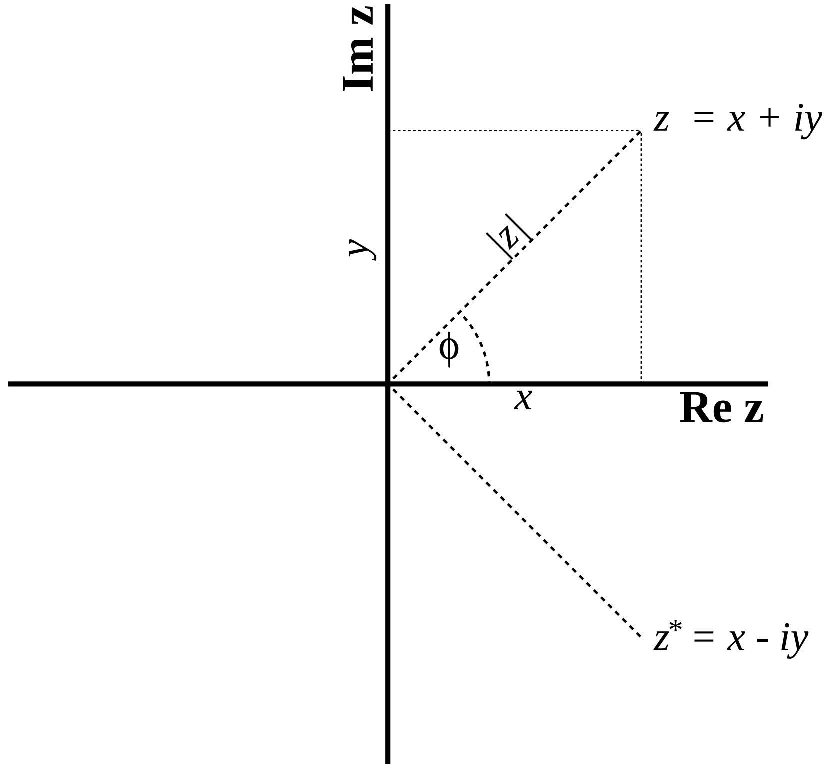
$|u| = \sqrt{1/25 + 4/25} = \sqrt{5/25} = 1/\sqrt{5}\,.$

2. Obliczyć $v = \left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$. Rozwiązanie:

$$v = \left(\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{1-2i-1}{2}\right)^2 = (-i)^2 = -1\,.$$

Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

Liczby zespolone — pary liczb rzeczywistych — odpowiadają punktom na *płaszczyźnie zespolonej*.



Przykłady

Znajdź miejsca geometryczne odpowiadające następującym zbiorom liczb zespolonych:

1. $|z| = 2$. (Odpowiedź: Okrąg o promieniu 2 i środku w punkcie $(0, 0)$.)

2. $|z-2i| < 9/16$. (Odpowiedź: *Wnętrze* okręgu o promieniu $9/16$ i środku w punkcie $(0, 2)$.)

3. $|z - 1| + |z + 1| = 3$. Rozwiązanie: Oznaczając $z = x + iy$, otrzymujemy

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 3$$

Ponieważ $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c \Rightarrow 4ab = (c^2 - a - b)^2$, mamy

$$4\left[(x-1)^2 + y^2\right]\left[(x+1)^2 + y^2\right] = \left(9 - (x-1)^2 - y^2 - (x+1)^2 - y^2\right)^2 .$$

Upraszczając to wyrażenie, otrzymujemy ostatecznie równanie elipsy $20x^2+36y^2 = 45$.

Postać trygonometryczna liczb zespolonych

Niech $z = x + iy \neq 0$. Przywołując interpretację geometryczną liczb zespolonych, widzimy, że

$$\frac{x}{|z|} = \cos\phi\,, \quad \frac{y}{|z|} = \sin\phi\,. \tag{22}$$

Innymi słowy,

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)\,. \tag{23}$$

Liczbę ϕ nazywamy *argumentem* (lub *fazą*) liczby zespolonej i oznaczamy $\phi = \arg z$. Argument nie jest określony jednoznacznie: z uwagi na okresowość funkcji trygonometrycznych, jeśli ϕ jest argumentem jakiejś liczby zespolonej, także wszystkie liczby postaci $\phi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, są jej argumentami. Argument liczby zespolonej należący do przedziału $[0, 2\pi)$ nazywamy *argumentem głównym* i oznaczamy $\operatorname{Arg} z$.

Wzór de Moivre'a

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi\,. \tag{24}$$

$$z = |z|e^{i\phi} = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)\,, \quad \phi \in \mathbb{R}\,. \tag{25}$$

Uzasadnienie: Dla liczby zespolonej z, funkcję wykładniczą definiujemy poprzez rozwinięcie Taylora:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,. \tag{26a}$$

Wobec tego

$$e^{i\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\phi^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\phi^{2m+1}}{(2m+1)!}$$
$$= \cos\phi + i\sin\phi\,. \tag{26b}$$

Przykłady

1. $\arg 1 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\arg(-5) = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. $\mathrm{Arg}\,(-5) = \pi$.
4. $\arg(1+i) = \pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. $\mathrm{Arg}\,(-7i) = 3\pi/2$.
6. Dla $\psi \in \mathbb{R}$, $\left|e^{i\psi}\right| = |\cos\psi + i\sin\psi| = \sqrt{\cos^2\psi + \sin^2\psi} = 1$.
7. Dla $m \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$ dostajemy
   $z^m = \left(|z|e^{i\phi}\right)^m = |z|^m e^{im\phi} = |z|^m(\cos m\phi + i\sin m\phi)$.

Przykład

Obliczyć $w = \left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^7$.

Rozwiązanie:

$$w = (p/q)^7 = p^7/q^7$$

$$p = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2^{1/2}e^{i\pi/4}$$

$$p^7 = 2^{7/2}e^{i7\pi/4} = 2^{7/2}e^{-i\pi/4} = 2^{7/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^3(1-i)$$

$$q = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3} \quad \left(\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$q^7 = 2^7e^{i7\pi/3} = 2^7e^{i\pi/3} = 2^7\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^6(1+i\sqrt{3})$$

$$w = \frac{2^3(1-i)}{2^6(1+i\sqrt{3})} = \frac{1}{2^3}\,\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{8}\,\frac{(1-i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{1}{8}\,\frac{1-i\sqrt{3}-i-\sqrt{3}}{1+3}$$

$$= \frac{1}{32}\left[1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})\right].$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Całkowite potęgi liczb zespolonych oblicza się “tak samo”, jak całkowite potęgi liczb rzeczywistych. Jeśli wykładnik nie jest całkowity, obliczenia przebiegają inaczej. W tym miejscu rozważmy potęgi o wykładnikach rzeczywistych, wymiernych.

Niech $z = |z|e^{i\phi} \equiv |z|e^{i\phi+2in\pi} \in \mathbb{C}$. Niech $r, s \in \mathbb{Z}$.

$$z^{r/s} \underset{\text{df}}{=} |z|^{r/s} e^{ir\phi/s+2inr\pi/s}\,,\ n \in \mathbb{Z} \tag{27}$$

Wzór (27) określa całą rodzinę liczb, nie pojedynczą liczbę! Dla $r, s, n \in \mathbb{Z}$, wyrażenie $e^{2inr\pi/s}$ jest okresowe, a więc wzór (27) określa skończony zbiór liczb.

Przykłady

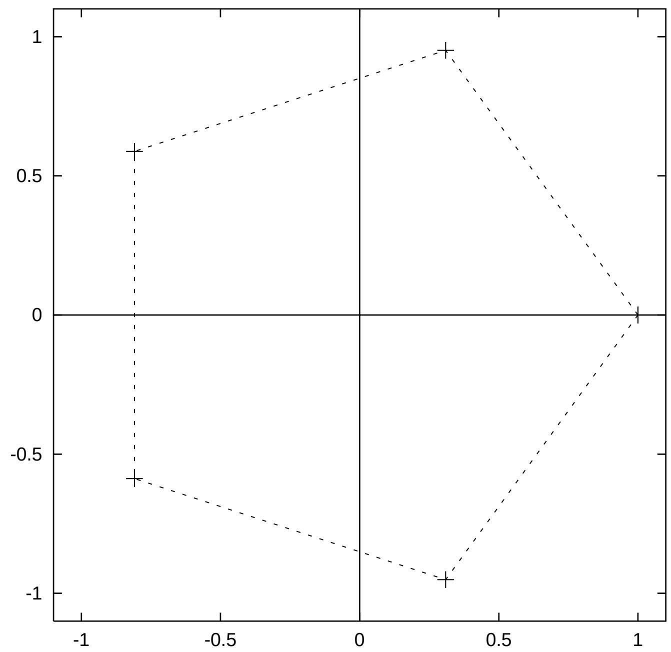
$1 = e^{2in\pi}$. $1^{1/k}$ określa k*-ty pierwiastek z jedności*. Dostajemy

$$1^{1/k} = e^{2il\pi/k} \text{ dla } l = 0, 1, \ldots, k-1\,.$$

Przykład: Jako czwarte pierwiastki z jedności otrzymujemy $e^0 = 1$, $e^{2i\pi/4} = i$, $e^{4i\pi/4} = -1$, $e^{6i\pi/4} = -i$.

Przykład: Ile niezależnych liczb dostaniemy obliczając $z^{2/3}$?
$z^{2/3} = |z|^{2/3} e^{2i\phi/3} e^{4in\pi/3}$. Zatem
$n = 0$: $|z|^{2/3} e^{2i\phi/3}$.
$n = 1$: $|z|^{2/3} e^{2i\phi/3} e^{4i\pi/3}$.
$n = 2$: $|z|^{2/3} e^{2i\phi/3} e^{8i\pi/3}$.
$n = 3$: $|z|^{2/3} e^{2i\phi/3} e^{12i\pi/3} = |z|^{2/3} e^{2i\phi/3} e^{4i\pi} = |z|^{2/3} e^{2i\phi/3}$.
Otrzymujemy zatem trzy *niezależne* pierwiastki (dla $n = 0, 1, 2$).

Przykład — piąte pierwiastki z jedności



W ogólności pierwiastki rzędu k z jedności leżą w wierzchołkach k-kąta foremnego.