Fizyka dla firm — Matematyka

3. Logika

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

15 października 2020

Notacja

$p, q, r, \ldots$ — zdania atomowe, którym można jednoznacznie przypisać wartość prawda (1) lub fałsz (0).

$P(x), Q(x), R(x), \ldots$ — formy zdaniowe.

Negacja

p	$\sim p$
1	0
0	1

Równoważność

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

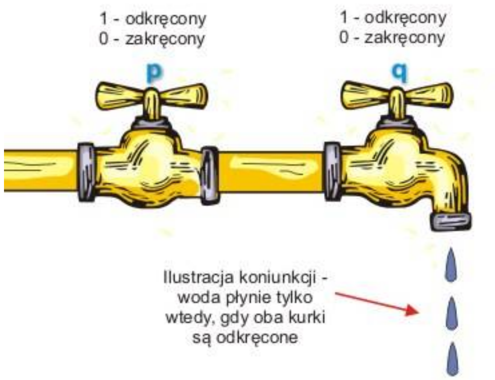
Równoważność jest prawdziwa, jeśli *obie* strony mają taką samą wartość logiczną.

Negacja negacji

$$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$$

Koniunkcja

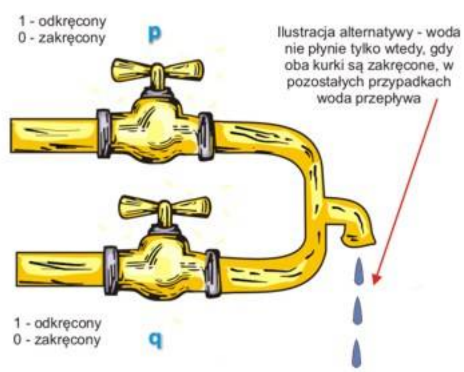
p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0



Zaprzeczenie koniunkcji: $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

Alternatywa

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



Zaprzeczenie alternatywy: $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Implikacja

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Zaprzeczenie implikacji: $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

Implikacja jest fałszywa tylko przy prawdziwym poprzedniku i fałszywym następniku. Prawo Dunsa Szkota, *ex falso quodlibet*: jeśli poprzednik implikacji jest fałszywy, implikacja jest prawdziwa bez względu na logiczną wartość następnika.

Przykłady

Które twierdzenia są prawdziwe, a które fałszywe?

1. Jeżeli $2+3=5$, to $4+3=8$.
2. Jeżeli $2+3=5$, to $4+3=7$.
3. Jeżeli $4+3=8$, to $2+3=5$.
4. Jeżeli $4+3=8$, to $2+3=6$.

Przykłady c.d.

Które twierdzenia są prawdziwe, a które fałszywe?

1. Jeżeli $2+3=5$, to $4+3=8$. fałsz
2. Jeżeli $2+3=5$, to $4+3=7$. prawda
3. Jeżeli $4+3=8$, to $2+3=5$. prawda — fałszywy poprzednik!
4. Jeżeli $4+3=8$, to $2+3=6$. prawda — fałszywy poprzednik!

Tautologie

Tautologia to zdanie *zawsze* prawdziwe, bez względu na wartość logiczną wchodzących w jego skład zdań atomowych. Prawdziwość tautologii można sprawdzać "metodą zero-jedynkową".

Przykład — zasada kontrapozycji $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\cdots \Leftrightarrow \cdots$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Zasada kontrapozycji: logiczna podstawa dowodów nie wprost.

Dwie ważne tautologie

Zasada niesprzeczności:

$$\sim (p \wedge \sim p)$$

Zasada wyłączonego środka

$$p \vee \sim p$$

Negacja kwantyfikatorów

$$\sim(\forall x : P(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \sim P(x))$$

$$\sim(\exists x : P(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \sim P(x))$$

Wnioskowanie — reguła odrywania

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Jeżeli wiemy, że pewna implikacja jest prawdziwa oraz wiemy, że prawdziwy jest jej poprzednik, wnioskujemy, że prawdziwy jest jej następnik.

Przykład

$$\begin{array}{r} \text{Twierdzenie: Jeżeli funkcja jest różniczkowalna, to jest ciągła.} \\ \text{Pewna funkcja } g(x) \text{ jest różniczkowalna} \\ \hline \text{Funkcja } g(x) \text{ jest ciągła.} \end{array}$$

Przykład ☺

$$\frac{\begin{array}{r} x \text{ jest pijakiem} \;\Rightarrow\; x \text{ jest złodziejem} \\ x \text{ jest pijakiem} \end{array}}{x \text{ jest złodziejem}}$$

poprawne wnioskowanie

$$\frac{\begin{array}{r} x \text{ jest pijakiem} \;\Rightarrow\; x \text{ jest złodziejem} \\ x \text{ jest złodziejem} \end{array}}{x \text{ jest pijakiem}}$$

wnioskowanie niepoprawne

Warunek konieczny, warunek wystarczający

Pewna reguła, którą można wyprowadzić z reguły odrywania:

$$\frac{\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}$$

Jeżeli wiemy, że pewna implikacja jest prawdziwa, ale jej następnik jest fałszywy, poprzednik implikacji *musi* być fałszywy.

Pdsumowując, jeżeli implikacja $p \Rightarrow q$ jest prawdziwa, prawdziwość q jest warunkiem koniecznym prawdziwości p: Jeżeli q jest fałszywe, p nie może być prawdziwe, bo otrzymalibyśmy fałszywą implikację. Z drugiej strony, prawdziwość q nie gwarantuje prawdziwości p, gdyż implikacja jest prawdziwa gdy jej poprzednik jest fałszywy.

Natomiast jeżeli implikacja $p \Rightarrow q$ jest prawdziwa i wiemy, że prawdziwy jest jej poprzednik, wystarcza to do stwierdzenia prawdziwości następnika (reguła odrywania): W implikacji $p \Rightarrow q$, p jest warunkiem wystarczającym q.

Reguły wnioskowania — sylogizm

Sylogizm: schemat wnioskowania oparty o dwie przesłanki zawierające wspólny element, a każdy element wniosku jest zawarty w dokładnie jednej przesłance.

Klasyczny sylogizm Arystotelesa

Jeżeli każdy M jest P oraz każdy P jest S, to każdy M jest S

można łatwo zinterpretować w języku teorii mnogości:

$$M \subset P \;\wedge\; P \subset S \;\Rightarrow\; M \subset S$$

Inny typ sylogizmu

$$\frac{\begin{array}{r}\forall x \in A : P(x) \\ y \in A\end{array}}{P(y)}$$

Przykład:

$$\frac{\begin{array}{r}\text{Wszyscy ludzie są śmiertelni.} \\ \text{Sokrates jest człowiekiem.}\end{array}}{\text{Sokrates jest śmiertelny.}}$$

Częsty błąd:

$$\frac{\begin{array}{r}\text{Wszystkie koty są śmiertelne.} \\ \text{Sokrates jest śmiertelny.}\end{array}}{\text{Sokrates jest kotem.}}$$

☺

$$\frac{\begin{array}{r}x \in K : \Rightarrow \;\; P(x) \\ P(s)\end{array}}{s \in K}$$

Operator NAND

Negacja oraz dowolna operacja z trzech: koniunkcja, alternatywa, implikacja, wystarczają do zdefiniowania wszystkich pozostałych operacji logicznych. Znane są także funktory, które pojedynczo wystarczą do zdefiniowania wszystkich operacji logicznych.

Operator NAND. Operator $p \mid q$ zdefiniowany jest przez poniższą tablicę prawdy:

p	q	$p \mid q$
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Negacja i koniunkcja za pomocą NAND

p	$p \mid p$	$\sim p$
1	0	0
0	1	1

p	q	$p \mid q$	$(p \mid q) \mid (p \mid q)$	$p \wedge q$
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

Inne operatory

Operator XOR (alternatywa wykluczająca). Operator $p \veebar q$ zdefiniowany jest przez poniższą tablicę prawdy:

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Operator NOR. Operator $p \downarrow q$ zdefiniowany jest przez poniższą tablicę prawdy:

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

