2. Zbiory

P. F. Góra

12 października 2020

Relacja w zbiorach A, B: podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times B$. Oznaczamy $\mathcal{R}(a, b), a \in A, b \in B$. Relację $\mathcal{R}'$ spełniającą własność $\forall x \in A\ y \in B : \mathcal{R}(a, b) \Rightarrow \mathcal{R}'(b, a)$ nazywam **relacją odwrotną** do relacji $\mathcal{R}$. Relacja odwrotna jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $B \times A$.

Rozważamy relacje zachodzące w jednym zbiorze, $A \times A$.

Relacja zwrotna: $\forall x \in A : \mathcal{R}(x, x)$

Relacja symetryczna: $\forall x, y \in A : \mathcal{R}(x, y) \Rightarrow \mathcal{R}(y, x)$

Relacja przechodnia: $\forall x, y, z \in A : \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) \Rightarrow \mathcal{R}(x, z)$.

Relację, która jest jednocześnie zwrotna, symetryczna i przechodnia, nazywamy **relacją równoważności**.

Zbiór wszystkich $x \in A$, pomiędzy którymi zachodzi relacja równoważności, nazywamy **klasą abstrakcji** względem tej relacji. Przykłady: ułamki $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots, \frac{-1}{-2}, \ldots$; wektory równoległe.

Relacja antysymetryczna: $\forall x, y \in A : \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) \Rightarrow x = y$.

Relację, która jest jednocześnie zwrotna, przechodnia i antysymetryczna nazywam relacją **słabego częściowego porządku**.

Niech $\mathcal{R}$ będzie słabym częściowym porządkiem. Jeżeli zachodzi $\forall x, y \in A : \mathcal{R}(x, y) \vee \mathcal{R}(y, x)$, relację taką nazywam porządkiem liniowym. Dla każdej pary elementów, albo pierwszy jest "mniejszy" od drugiego, albo drugi jest "mniejszy" od pierwszego. Wobec tego *wszystkie* elementy zbioru można uporządkować względem tej relacji.

Jeżeli $\forall x \in A,\ y, z \in B : \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(x, z) \Rightarrow y = z$, relacja $\mathcal{R}$ jest **relacją jednoznaczną**: każdemu "argumentowi" odpowiada jeden i tylko jeden "wynik". Relację jednoznaczną nazywa się także **funkcją** lub **odwzorowaniem**. Stosuje się wtedy zwyczajowy zapis uproszczony: jeżeli $\mathcal{R}$ jest relacją jednoznaczną, to $\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow y = f(x)$. Jeżeli *relacja odwrotna* do relacji jednoznacznej także jest jednoznaczna, relację taką nazywa się **relacją wzajemnie jednoznaczną**.

Bijekcja:

$$\begin{aligned}
\forall x \in A\ \exists y \in B &: \mathcal{R}(x, y) \\
\forall y \in B\ \exists x \in A &: \mathcal{R}(x, y) \\
\forall x, y \in A,\ z \in B &: \mathcal{R}(x, z) \wedge \mathcal{R}(y, z) \Rightarrow x = y \\
\forall x \in A,\ y, z \in B &: \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(x, z) \Rightarrow y = z
\end{aligned}$$

Bijekcja jest relacją (funkcją) wzajemnie jednoznaczną, odwzorowującą *cały* zbiór A *na* zbiór B. Relacja (funkcja) odwrotna odwzorowuje cały zbiór B na zbiór A. Jeżeli pomiędzy dwoma zbiorami A, B istnieje bijekcja, stwierdzamy, że zbiory te są równoliczne.