Fizyka dla firm
Zadania 58 z rozwążaniami

P. F. Góra

17 czerwca 2021

1. Dany jest sferycznie symetryczny obłok materii o gęstości $\rho(r)$, gdzie r jest odległością od środka obłoku. Znajdź potencjał pola grawitacyjnego w odległości L od środka obłoku.

Rozwiązanie: Sformułowanie to jest dość ogólne — zadania nie da się rozwiązać "do końca" bez wyspecyfikowania $\rho(r)$. Ogólnie

$$V = -\iiint \frac{G\rho(r)}{l}\,dx\,dy\,dz \tag{1a}$$

gdzie l jest odległością od punktu, w którym obliczamy pole.

Z uwagi na symetrię sferyczną wprowadzamy współrzędne

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta\cos\phi \\ y &= r\cos\theta\sin\phi \\ z &= r\sin\theta \end{cases} \tag{1b}$$

gdzie $r \in [0,\infty), \theta \in [-\pi/2,\pi/2], \phi \in [0,2\pi]$. Jakobian przekształcenia wynosi $|J| = r^2\cos\theta$.

Badany punkt umieśćmy na osi OZ, w odległości L od środka układu współrzędnych. Wobec tego

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{x^2+y^2+(z-L)^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + (r\sin\theta - L)^2} \\ &= \sqrt{r^2 - 2Lr\sin\theta + L^2} \end{aligned} \tag{1c}$$

Wobec tego potencjał

$$V = -G\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{r^2-2Lr\sin\theta+L^2}}\,d\theta \tag{1d}$$

Obliczam

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{r^2-2Lr\sin\theta+L^2}}\,d\theta &= \left| \begin{array}{l} r^2-2Lr\sin\theta+L^2 = u \\ -2Lr\cos\theta\,d\theta = du \\ -\pi/2 \to r^2+2Lr+L^2 = (r+L)^2 \\ \ \ \pi/2 \to r^2-2lr+L^2 = (r-L)^2 \end{array} \right| = -\frac{r^2}{2Lr}\int_{(r+L)^2}^{(r-L)^2} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= -\frac{r}{L}\,\sqrt{u}\Big|_{(r+L)^2}^{(r-L)^2} = -\frac{r}{L}\left(\sqrt{(r-L)^2} - \sqrt{(r+L)^2}\right) \end{aligned} \tag{1e}$$

Wobec tego

$$V = \frac{2\pi G}{L}\int_0^{\infty} r\,\rho(r)\left(\sqrt{(r-L)^2} - \sqrt{(r+L)^2}\right)dr \tag{1f}$$

Ponieważ $\sqrt{(r-L)^2} = |r-L|$, całkę po dr musimy rozbić na sumę $\int_0^\infty = \int_0^L + \int_L^\infty$, gdyż w punkcie $r = L$ wyrażenie pod wartością bezwzględną zmienia znak. Mamy

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi G}{L}\int\limits_0^L (|r-L| - (r+L))r\,\rho(r)\,dr + \frac{2\pi G}{L}\int\limits_L^\infty (|r-L| - (r+L))r\,\rho(r)\,dr \\ &= \frac{2\pi G}{L}\left[\int\limits_0^L (L-r-r-L))r\,\rho(r)\,dr + \int\limits_L^\infty (r-L-r-L))r\,\rho(r)\,dr\right] \qquad (1g) \\ &= -\frac{4\pi G}{L}\left[\int\limits_0^L r^2\rho(r)\,dr + L\int\limits_L^\infty r\,\rho(r)\,dr\right] \qquad (1h) \end{aligned}$$

Postać (1h) jest najbardziej ogólną postacią, do jakiej można dojść nie określając jawnie funkcji $\rho(r)$.

Przykładowymi gęstościami może być gęstość jednorodnej kuli

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4}\,\frac{M}{\pi R^3} = \text{const} & r \leqslant R \\ 0 & r > R \end{cases} \qquad (1i)$$

— wówczas jeśli $L > R$, mamy potencjał nazewnątrz kuli i druga całka w (1h) znika tożsamościowo, natomiast jeśli $L < R$, druga całka redukuje się do $\int_L^R$ i mamy potencjał wewnątrz kuli — gęstość wykładniczą (patrz niżej), lub, na przykład, gęstość postaci $\rho(r) = \rho_0(r_0^4 + r^4)^{-1}$ (nie omawiana w tych przykładach).

2. Znajdź potencjał grawitacyjny wytwarzany przez jednorodną kulę o masie M i promieniu R.

Rozwiązanie: Punktem wyjścia jest wyrażenie (1h). Musimy rozpatrzyć dwa przypadki: I — $L < R$, II — $L > R$.

Przypadek I, $L < R$. Wyrażenie (1h) przybiera postać

$$\begin{aligned} V &= -\frac{4\pi G}{L}\cdot\frac{3M}{4\pi R^3}\left[\int\limits_0^L r^2\,dr + L\int\limits_L^R r\,dr\right] \\ &= -\frac{3GM}{LR^3}\left[\frac{1}{3}r^3\bigg|_0^L + L\,\frac{1}{2}r^2\bigg|_L^R\right] = -\frac{3GM}{LR^3}\left[\frac{1}{3}L^3 + \frac{1}{2}LR^2 - \frac{1}{2}L^3\right] \\ &= \frac{GM}{2R^3}\,L^2 - \frac{3GM}{2R} \qquad (2a) \end{aligned}$$

Jest to potencjał harmoniczny.

Przypadek II, $L > R$. W tym wypadku druga całka w (1h) znika, a pierwsza redukuje się do $\int_0^R$, gdyż gęstość znika dla $r > R$, patrz (1i). Zatem

$$V = -\frac{4\pi G}{L}\cdot\frac{3M}{4\pi R^3}\int\limits_0^R r^2\,dr = -\frac{GM}{L} \qquad (2b)$$

Ostatecznie, łącząc przypadki I i II,

$$V(L) = \begin{cases} \frac{GM}{2R^3}\,L^2 - \frac{3GM}{2R} & L \leqslant R \\ -\frac{GM}{L} & L > R \end{cases} \qquad (2c)$$

Choć nie jest to wymagane w zadaniu, policzmy natężenie pola grawitacyjnego $E = -\frac{d}{dL}V(L)$.

$$E(L) = \begin{cases} -\frac{GM}{R^3}\,L & L \leqslant R \\ -\frac{GM}{L^2} & L > R \end{cases} \qquad (2d)$$

Zauważmy, że potencjał (2c) jest klasy C_1 w $L = R$.

3. Znajdź potencjał grawitacyjny wytwarzany przez sferycznie symetryczny obłok materii o gęstości $\rho(r) = \rho_0 \exp(-r/r_0)$, gdzie ρ_0, r_0 są stałymi.

Rozwiązanie: Podstawiając do wyrażenia (1h) otrzymamy

$$V = -\frac{4\pi G\rho_0}{L}\left[\int\limits_0^L r^2 \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) dr + L\int\limits_L^\infty r\,\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) dr\right] \tag{3a}$$

Musimy obliczyć całki pomocnicze $\int r^2 \exp(\alpha r)\,dr$, $\int r \exp(\alpha r)\,dr$. Zauważmy, że

$$\int \exp(\alpha r)\,dr = \frac{1}{\alpha}\,\exp(\alpha r) \tag{3b}$$

Jeżeli powyższe wyrażenie zróżniczkujemy obustronnie po $d/d\alpha$

$$\int r\,\exp(\alpha r)\,dr = \left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{r}{\alpha}\right)\exp(\alpha r) \tag{3c}$$

Różniczkując po raz kolejny po $d/d\alpha$ dostajemy

$$\begin{aligned}\int r^2\,\exp(\alpha r)\,dr &= \left(\frac{2}{\alpha^3} - \frac{r}{\alpha^2}\right)\exp(\alpha r) + \left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{r}{\alpha}\right) r\,\exp(\alpha r) \\ &= \left(\frac{2}{\alpha^3} - \frac{2r}{\alpha^2} + \frac{r^2}{\alpha}\right)\exp(\alpha r) \end{aligned} \tag{3d}$$

Podstawiając $\alpha = -1/r_0$ dostajemy

$$\int r\,\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) dr = -(r_0^2 + r_0 r)\,\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \tag{3e}$$

$$\int r^2\,\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) dr = -(2r_0^3 + 2r_0^2 r + r_0 r^2)\,\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \tag{3f}$$

Te wyrażenia podstawiamy do (3a):

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi G\rho_0}{L}\left[(2r_0^3 + 2r_0^2 r + r_0 r^2)\,\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)\Bigg|_0^L + L(r_0^2 + r_0 r)\,\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)\Bigg|_L^\infty\right] \\ &= \frac{4\pi G\rho_0}{L}\left[\left(2r_0^3 + 2r_0 L^2 + r_0 L^2 - r_0^2 L - r_0 L^2\right)\exp\left(-\frac{L}{r_0}\right) - 2r_0^3\right] \\ &= -\frac{8\pi G\rho_0 r_0^3}{L}\left[1 - \exp\left(-\frac{L}{r_0}\right)\right] + 4\pi G\rho_0 r_0\,(2L - r_0)\exp\left(-\frac{L}{r_0}\right) \end{aligned} \tag{3g}$$

Ten potencjał *nie* jest osobliwy w $L = 0$, natomiast dla $L \gg r_0$

$$V \simeq -\frac{8\pi G\rho_0 r_0^3}{L} \tag{3h}$$