Egzamin — zadania dodatkowe

P. F. Góra

28 czerwca 2021

1. Znajdź normę macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

indukowaną przez zwykły, Euklidesowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$.

Rozwiązanie: Podana macierz nie jest symetryczna, nie ma więc *prostego* związku pomiędzy jej wartościami własnymi a normą. Norma macierzy jest zdefiniowana jako

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \tag{2}$$

Ponieważ funkcja kwadratowa dla argumentów dodatnich jest ściśle rosnąca, zamiast badać normę, możemy badać kwadrat normy. Niech $\mathbf{x} = [a, b, c]$. Warunek $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$ oznacza, że

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \tag{3}$$

Mamy

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c \\ -a+c \\ -a-b \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathcal{N}^2 = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 = (b+c)^2 + (-a+c)^2 + (-a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab - 2ac + 2bc \tag{5}$$

Zadanie polega na znalezieniu maksimum wyrażenia (5) pod warunkiem (3).

W tym celu tworzę funkcję

$$\mathcal{F} = \mathcal{N}^2 - \lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 1) \tag{6}$$

obliczam pochodne $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial b}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c}$ i przyrównuję je do zera, otrzymując układ równań

$$(2-\lambda)a + b - c = 0 \tag{7a}$$

$$a + (2-\lambda)b + c = 0 \tag{7b}$$

$$-a + b + (2-\lambda)c = 0 \tag{7c}$$

Układ równań (7) jest jednorodnym układem równań liniowych, a więc jego rozwiązaniem jest $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, co nie spełnia warunku (3). Układ ten może mieć niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy **wyznacznik główny tego układu równa się zero**. Oznaczając $2 - \lambda = z$ otrzymuję

$$\begin{vmatrix} z & 1 & -1 \\ 1 & z & 1 \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = z^3 - 3z - 2 = (z+1)^2(z-2) = 0 \tag{8}$$

skąd wyznaczam z, skąd mógłbym wyznaczyć λ, czego jednak nie potrzebuję, gdyż znajomość z wystarcza.

I. $z = -1$. Podstawiając tę wartość do (7) widzę, że dwa równania są zależne od trzeciego:

$$-a + b - c = 0 \tag{9a}$$
$$a - b + c = 0 \tag{9b}$$
$$-a + b - c = 0 \tag{9c}$$

skąd $b = a + c$. Podstawiając to wyrażenie do (3) dostaję

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a^2 + (a+c)^2 + c^2 &= 1 \\ a^2 + ac + c^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{10}$$

Z kolei po podstawieniu do (5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2 &= 2(a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc) = 2(a^2 + (a+c)^2 + c^2 + (a+c)^2 - ac) \\ &= 2 \cdot 3(a^2 + ac + c^2) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \end{aligned} \tag{11}$$

II. $z = 2$. Tylko dwa równania (7) są niezależne

$$2a + b - c = 0 \tag{12a}$$
$$a + 2b + c = 0 \tag{12b}$$
$$-a + b + 2c = 0 \tag{12c}$$

(dodając pierwsze i trzecie równanie otrzymujemy drugie). Stąd $a = c$, $b = -c$ i po podstawieniu do (3) $(a, b, c) = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ lub $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$. W obu przypadkach

$$\mathcal{N}^2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0 \tag{13}$$

Ostatecznie

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\max\{3, 0\}} = \sqrt{3}\,. \tag{14}$$

P.s. Wartościami własnymi macierzy (1) są liczby $\pm i\sqrt{3}, 0$, więc w tym wypadku normą macierzy jest największy moduł jej wartości własnej, ale dzieje się tak z uwagi na fakt, iż macierz $i\mathbf{A}$ jest hermitowska (*nota bene* ta obserwacja mogłaby stanowić podstawę innego prawidłowego rozwiązania tego zadania: $\|\mathbf{A}\| = \|(-i)i\mathbf{A}\| = |-i| \cdot \|i\mathbf{A}\| = \|i\mathbf{A}\|$, więc zadanie sprowadza się do obliczenia normy macierzy hermitowskiej, która ma takie same własności, jak norma macierzy symetrycznej, rzeczywistej). W ogólności nie ma prostego związku pomiędzy wartościami własnymi macierzy niesymetrycznych a normami macierzy.

2. Dany jest nieskończony, sferycznie symetryczny obłok gazu, którego gęstość spada wraz z odległością od centrum obłoku zgodnie ze wzorem
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{r_0^3 + r^3}\,, \quad r \geqslant 0 \tag{15}$$
gdzie $r_0, \rho_0 > 0$ są stałymi. Znajdź potencjał grawitacyjny wytwarzany przez obłok w odległości L od jego centrum.

Rozwiązanie:
$$V = -\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{G\rho(r)}{l}\, dx\, dy\, dz \tag{16}$$
gdzie l jest odległością od punktu, w którym obliczamy potencjał pola grawitacyjnego.

Z uwagi na symetrię sferyczną wprowadzamy współrzędne
$$\begin{cases} x &= r\cos\theta\cos\phi \\ y &= r\cos\theta\sin\phi \\ z &= r\sin\theta \end{cases} \tag{17}$$
gdzie $r \in [0, \infty), \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \phi \in [0, 2\pi]$. Jakobian przekształcenia wynosi $|J| = r^2\cos\theta$.

Wprowadzam układ współrzędnych, którego środek mieści się w środku obłoku, a badany punkt leży na osi OZ, w odległości L od środka układu współrzędnych. Wobec tego
$$\begin{aligned} l &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z-L)^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + (r\sin\theta - L)^2} \\ &= \sqrt{r^2 - 2Lr\sin\theta + L^2} \end{aligned} \tag{18}$$
Wobec tego potencjał
$$V = -G\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\infty} dr \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{r^2 - 2Lr\sin\theta + L^2}}\, d\theta \tag{19}$$
Obliczam
$$\begin{aligned} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{r^2 - 2Lr\sin\theta + L^2}}\, d\theta &= \left| \begin{array}{l} r^2 - 2Lr\sin\theta + L^2 = u \\ -2Lr\cos\theta\, d\theta = du \\ -\pi/2 \to r^2 + 2Lr + L^2 = (r+L)^2 \\ \quad \pi/2 \to r^2 - 2lr + L^2 = (r-L)^2 \end{array} \right| = -\frac{r^2}{2Lr}\int\limits_{(r+L)^2}^{(r-L)^2} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= -\frac{r}{L}\,\sqrt{u}\Big|_{(r+L)^2}^{(r-L)^2} = -\frac{r}{L}\left(\sqrt{(r-L)^2} - \sqrt{(r+L)^2}\right) \end{aligned} \tag{20}$$
Wobec tego
$$V = \frac{2\pi G}{L}\int\limits_0^{\infty} r\,\rho(r)\left(\sqrt{(r-L)^2} - \sqrt{(r+L)^2}\right) dr \tag{21}$$
Ponieważ $\sqrt{(r-L)^2} = |r-L|$, całkę po dr musimy rozbić na sumę $\int_0^\infty = \int_0^L + \int_L^\infty$, gdyż w punkcie $r = L$ wyrażenie pod wartością bezwzględną zmienia znak. Mamy
$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi G}{L}\int\limits_0^L (|r-L| - (r+L))r\,\rho(r)\,dr + \frac{2\pi G}{L}\int\limits_L^\infty (|r-L| - (r+L))r\,\rho(r)\,dr \\ &= \frac{2\pi G}{L}\left[\int\limits_0^L (L - r - r - L))r\,\rho(r)\,dr + \int\limits_L^\infty (r - L - r - L))r\,\rho(r)\,dr\right] \qquad (22) \\ &= -\frac{4\pi G}{L}\left[\int\limits_0^L r^2\rho(r)\,dr + L\int\limits_L^\infty r\,\rho(r)\,dr\right] \qquad (23) \end{aligned}$$

Dopiero na tym etapie jawnie korzystamy z gęstości (15), dodatkowo podstawiając $r = r_0\, s$:

$$V = -\frac{4\pi G\rho_0}{L} \int\limits_0^{L/r_0} \frac{s^2}{1+s^3}\, ds - \frac{4\pi G\rho_0}{r_0} \int\limits_{L/r_0}^{\infty} \frac{s}{1+s^3}\, ds \tag{24}$$

Musimy obliczyć dwie całki nieoznaczone.

$$I_1 = \int \frac{s^2}{1+s^3}\, ds = \frac{1}{3}\ln(1+s^3) \tag{25}$$

Drugą całkę

$$I_2 = \int \frac{s}{1+s^3}\, ds \tag{26}$$

obliczamy poprzez rozkład na ułamki proste. $s^3 + 1 = (s+1)(s^2 - s + 1)$.

$$\frac{A}{s+1} + \frac{Bs + C}{s^2 - s + 1} = \frac{(A+B)s^2 + (-A+B+C)s + (A+C)}{1+s^3} \tag{27}$$

Zatem

$$\begin{cases} A + B & = 0 \\ -A + B + C & = 1 \\ A + C & = 0 \end{cases} \tag{28}$$

więc $A = -1/3$, $B = C = 1/3$.

$$I_2 = -\frac{1}{3}\int \frac{ds}{s+1} + \frac{1}{3}\int \frac{s+1}{s^2 - s + 1}\, ds \tag{29}$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{ds}{s+1} = \frac{1}{3}\ln(s+1) \tag{30}$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{s+1}{s^2 - s + 1}\, ds = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2s + 2 - 1 + 1}{s^2 - s + 1}\, ds \tag{31}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2s - 1}{s^2 - s + 1}\, ds = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln(s^2 - s + 1) \tag{32}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{3}{s^2 - s + 1}\, ds = \frac{1}{2}\int \frac{ds}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ = \left| \begin{array}{l} s - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ ds = \frac{\sqrt{3}}{2}\, dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}}\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg} t = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2s - 1}{\sqrt{3}} \end{gathered} \tag{33}$$

Zbierając wszystkie człony razem,

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{3}\ln(s+1) + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln(s^2 - s + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2s - 1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{3}\ln\sqrt{\frac{s^2 - s + 1}{s^2 + 2s + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2s - 1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{34}$$

(Zwracam uwagę, że oba człony logarytmiczne trzeba połączyć w jeden, żeby potem uniknąć symbolu nieoznaczonego typu $\infty - \infty$ przy obliczaniu górnej granicy całkowania.)

Ostatecznie

$$V(L) = -\frac{4\pi G\rho_0}{3L} \ln\left(1 + \left(\frac{L}{r_0}\right)^3\right) - \frac{4\pi G\rho_0}{r_0}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\ln\sqrt{\frac{L^2 - r_0 L + r_0^2}{L^2 + 2r_0 L + r_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2L - r_0}{\sqrt{3}r_0}\right] \tag{35}$$

Potencjał nie jest osobliwy w $L = 0$, natomiast dla $L \gg r_0$

$$V(L) \simeq -\frac{4\pi G\rho_0}{r_0} \cdot \frac{\ln(L/r_0)}{L/r_0} \tag{36}$$

a więc dąży do zera wolniej, niż potencjał Coulombowski.

PFG