

Fizyka dla firm — Matematyka

Dodatek: sinus i kosinus sumy kątów

P. F. Góra

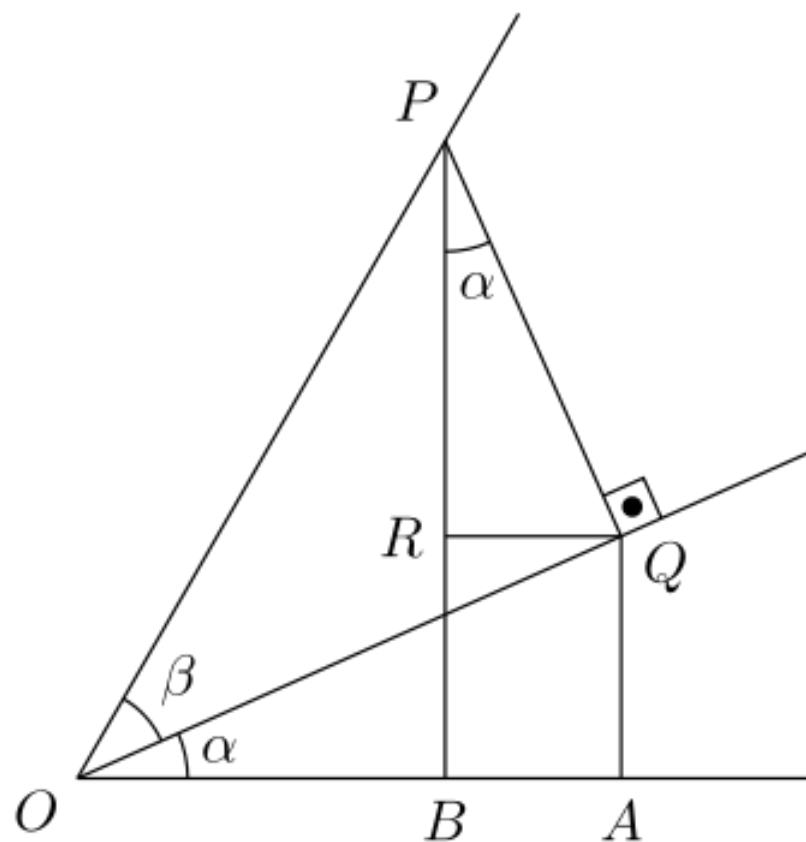
<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

2 listopada 2020

W tym Dodatku przedstawię geometryczne wyprowadzenie wzorów na $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ dla $0 < \alpha, \beta < \pi/2$.

Osobom planującym przestudiowanie tych wyprowadzeń, radzę *wydrukowanie* przynajmniej strony z rysunkiem.

Rozpatrzmy rysunek:



I.

Zauważmy, że oba kąty oznaczone na rysunku przez α , są równe.

Istotnie, $\angle OQA = \pi/2 - \alpha$, wobec czego $\angle OQR = \alpha$. Ponieważ kąt $\angle OQP$ jest prosty, kąt $\angle RQP = \pi/2 - \alpha$. W tej sytuacji, ponieważ kąt $\angle PRQ$ też jest prosty, kąt $\angle RPQ = \alpha$.

II.

Z rysunku widzimy, że (napis “ BP ” oznacza “długość odcinka BP ” itd)

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{BP}{OP} \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OB}{OP} \quad (2)$$

$$\sin \alpha = \frac{AQ}{OQ} = \frac{RQ}{PQ} \quad (3)$$

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OQ} = \frac{PR}{PQ} \quad (4)$$

$$\sin \beta = \frac{PQ}{OP} \quad (5)$$

$$\cos \beta = \frac{OQ}{OP} \quad (6)$$

III. Sinus

$$BP = PR + RB = PR + AQ \quad (7)$$

Rozpatrujemy trójkąt $\triangle OAQ$.

$$PR = PQ \cos \alpha \quad (8a)$$

$$AQ = OQ \sin \alpha \quad (8b)$$

Teraz rozpatrujemy $\triangle OQP$.

$$PQ = OP \sin \beta \quad (9a)$$

$$OQ = OP \cos \beta \quad (9b)$$

$$BP = PQ \cos \alpha + OQ \sin \alpha = OP \sin \beta \cos \alpha + OP \cos \beta \sin \alpha \quad (10)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{BP}{OP} = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (11)$$

IV. Kosinus

$$OB = OA - BA = OA - RQ \quad (12)$$

$\triangle OAQ$:

$$OA = OQ \cos \alpha \quad (13)$$

$\triangle PQR$:

$$RQ = PQ \sin \alpha \quad (14)$$

$\triangle OQP$:

$$PQ = OP \sin \beta \quad (15a)$$

$$OQ = OP \cos \beta \quad (15b)$$

$$OB = OQ \cos \alpha - PQ \sin \alpha = OP \cos \beta \cos \alpha - OP \sin \beta \sin \alpha \quad (16)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (17)$$