Egzamin
zadania z rozwiązaniami

P. F. Góra

21 czerwca 2021

1. Znajdź normę macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

indukowaną przez zwykły, Euklidesowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$.

Rozwiązanie: Norma macierzy jest zdefiniowana jako

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \tag{2}$$

Ponieważ funkcja kwadratowa dla argumentów dodatnich jest ściśle rosnąca, zamiast badać normę, możemy badać kwadrat normy. Niech $\mathbf{x} = [a, b, c]$. Warunek $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$ oznacza, że

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \tag{3}$$

Mamy

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+b+c \\ -a+2b+c \\ -a+b+2c \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathcal{N}^2 = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 = (2a+b+c)^2 + (-a+2b+c)^2 + (-a+b+2c)^2 = 6a^2 + 6b^2 + 6c^2 - 2ab - 2ac + 10bc \tag{5}$$

Zadanie polega na znalezieniu maksimum wyrażenia (5) pod warunkiem (3).

W tym celu tworzę funkcję

$$\mathcal{F} = \mathcal{N}^2 - \lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 1) \tag{6}$$

obliczam pochodne $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}$, $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial b}$, $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c}$ i przyrównuję je do zera, otrzymując układ równań

$$(6-\lambda)a - b - c = 0 \tag{7a}$$
$$-a + (6-\lambda)b + 5c = 0 \tag{7b}$$
$$-a + 5b + (6-\lambda)c = 0 \tag{7c}$$

Układ równań (7) jest jednorodnym układem równań liniowych, a więc jego rozwiązaniem jest $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, co nie spełnia warunku (3). Układ ten może mieć niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy **wyznacznik główny tego układu równa się zero**. Oznaczając $6 - \lambda = z$ otrzymuję

$$\begin{vmatrix} z & -1 & -1 \\ -1 & z & 5 \\ -1 & 5 & z \end{vmatrix} = z^3 - 27z + 10 = (z-5)\left(z + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}\right)\left(z + \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right) = 0 \tag{8}$$

skąd wyznaczam z, skąd mógłbym wyznaczyć λ, czego jednak nie potrzebuję, gdyż znajomość z wystarcza.

Znając z, możemy, korzystając z (7), wyrazić a, b poprzez c:

$$a = \frac{z-5}{z^2-1}\, c \tag{9a}$$

$$b = \frac{1-5z}{z^2-1}\, c \tag{9b}$$

Podstawiając (9) do (3), dostajemy

$$\left[\frac{(z-5)^2}{(z^2-1)^2} + \frac{(1-5z)^2}{(z^2-1)^2} + 1\right] c^2 = 1 \tag{10}$$

skąd wyznaczamy c, a następnie możemy wyznaczyć a, b z (9). Ponieważ znaki a, b są wyznaczone przez znak c, a wyrażenie (5) nie zmienia się przy zamianie $(a, b, c) \to (-a, -b, -c)$, wystarczy sprawdzać tylko jeden znak c.

I. $z = 5$.

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{11a}$$

$$a = 0 \tag{11b}$$

$$b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{11c}$$

$$\mathcal{N}_{\mathrm{I}}^2 = 1 \tag{11d}$$

II. $z = -\frac{5}{2} \mp \frac{\sqrt{33}}{2}$. Niestety, otrzymane wyrażenia są "brzydkie". Jeżeli się nie pomyliłem,

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathcal{N}_{\max}^2} = \sqrt{\frac{429 + 47\sqrt{33}}{66}} \simeq 3.25 \tag{12}$$

2. Znajdź czynnik całkujący formy różniczkowej

$$DQ = \frac{x}{y^2}\, dx - \frac{1}{y}\, dy \tag{13}$$

Pokaż, że podana forma różniczkowa po przemnożeniu przez czynnik całkujący jest różniczką zupełną. Znajdź funkcję, której różniczką jest znaleziona różniczka zupełna.

Rozwiązanie: Ponieważ wyrażenie

$$\frac{1}{\frac{x}{y^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y^2}\right)\right) = \frac{y^2}{x}\left(0 - \left(-\frac{2x}{y^3}\right)\right) = \frac{2}{y} \tag{14}$$

podana forma różniczkowa ma czynnik całkujący postaci

$$\mu(y) = \exp\left(\int \frac{2}{y}\, dy\right) = C\, y^2 \tag{15}$$

gdzie C jest dowolną stałą większą od zera. Biorąc $C = 1$ otrzymujemy

$$df = \mu(y) \cdot DQ = x\, dx - y\, dy \tag{16}$$

co jest różniczką zupełną, gdyż pochodne mieszane są sobie równe (i wynoszą 0). df jest różniczką funkcji

$$df = d\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) \tag{17}$$

3. Oblicz całkę krzywoliniową

$$\int\limits_{\Gamma} x\,dx - y\,dy \tag{18}$$

gdzie Γ jest krzywą (łukiem elipsy)

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= 2\sin t \\ & t \in [0, \pi/2] \end{cases} \tag{19}$$

Rozwiązanie: Funkcja podcałkowa jest różniczą zupełną (znalezioną w poprzednim zadaniu), więc wartość całki nie zależy od drogi całkowania. Punktem początkowym ($t = 0$) jest $(1, 0)$, punktem końcowym ($t = \pi/2$) jest $(0, 2)$, zatem

$$\int\limits_{\Gamma} x\,dx - y\,dy = f(0,2) - f(1,0) = \frac{1}{2}\,0^2 - \frac{1}{2}\,2^2 - \frac{1}{2}\,1^2 + \frac{1}{2}\,0^2 = -\frac{5}{2} \tag{20}$$

4. Dany jest nieskończony, sferycznie symetryczny obłok gazu, którego gęstość spada wraz z odległością od centrum obłoku zgodnie ze wzorem

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{r_0^4 + r^4} \tag{21}$$

gdzie $r_0, \rho_0 > 0$ są stałymi. Znajdź potencjał grawitacyjny wytwarzany przez obłok w odległości L od jego centrum.

Rozwiązanie:

$$V = -\iiint \frac{G\rho(r)}{l}\,dx\,dy\,dz \tag{22}$$

gdzie l jest odległością od punktu, w którym obliczamy pole.

Z uwagi na symetrię sferyczną wprowadzamy współrzędne

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta\cos\phi \\ y &= r\cos\theta\sin\phi \\ z &= r\sin\theta \end{cases} \tag{23}$$

gdzie $r \in [0, \infty), \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \phi \in [0, 2\pi]$. Jakobian przekształcenia wynosi $|J| = r^2\cos\theta$.

Badany punkt umieśćmy na osi OZ, w odległości L od środka układu współrzędnych. Wobec tego

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z-L)^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + (r\sin\theta - L)^2} \\ &= \sqrt{r^2 - 2Lr\sin\theta + L^2} \end{aligned} \tag{24}$$

Wobec tego potencjał

$$V = -G\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\infty} dr \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{r^2 - 2Lr\sin\theta + L^2}}\,d\theta \tag{25}$$

Obliczam

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{r^2 - 2Lr\sin\theta + L^2}}\,d\theta &= \left| \begin{array}{c} r^2 - 2Lr\sin\theta + L^2 = u \\ -2Lr\cos\theta\,d\theta = du \\ -\pi/2 \to r^2 + 2Lr + L^2 = (r+L)^2 \\ \pi/2 \to r^2 - 2lr + L^2 = (r-L)^2 \end{array} \right| = -\frac{r^2}{2Lr}\int\limits_{(r+L)^2}^{(r-L)^2} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= -\frac{r}{L}\,\sqrt{u}\Big|_{(r+L)^2}^{(r-L)^2} = -\frac{r}{L}\left(\sqrt{(r-L)^2} - \sqrt{(r+L)^2}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

Wobec tego

$$V = \frac{2\pi G}{L} \int\limits_0^\infty r\,\rho(r) \left(\sqrt{(r-L)^2} - \sqrt{(r+L)^2} \right) dr \tag{27}$$

Ponieważ $\sqrt{(r-L)^2} = |r-L|$, całkę po dr musimy rozbić na sumę $\int_0^\infty = \int_0^L + \int_L^\infty$, gdyż w punkcie $r = L$ wyrażenie pod wartością bezwzględną zmienia znak. Mamy

$$\begin{aligned}
V &= \frac{2\pi G}{L} \int\limits_0^L (|r-L| - (r+L)) r\,\rho(r)\,dr + \frac{2\pi G}{L} \int\limits_L^\infty (|r-L| - (r+L)) r\,\rho(r)\,dr \\
&= \frac{2\pi G}{L} \left[\int\limits_0^L (L - r - r - L)) r\,\rho(r)\,dr + \int\limits_L^\infty (r - L - r - L)) r\,\rho(r)\,dr \right] \qquad (28) \\
&= -\frac{4\pi G}{L} \left[\int\limits_0^L r^2 \rho(r)\,dr + L \int\limits_L^\infty r\,\rho(r)\,dr \right] \qquad (29)
\end{aligned}$$

Dopiero na tym etapie jawnie korzystamy z gęstości (21), dodatkowo podstawiając $r = r_0\, s$:

$$V = -\frac{4\pi G \rho_0}{r_0 L} \int\limits_0^{L/r_0} \frac{s^2}{1+s^4}\,ds - \frac{4\pi G \rho_0}{r_0^2} \int\limits_{L/r_0}^\infty \frac{s}{1+s^4}\,ds \tag{30}$$

Musimy obliczyć dwie całki nieoznaczone:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{s}{1+s^4}\,ds = \left| \begin{array}{l} s^2 = u \\ s\,ds = \frac{1}{2} du \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} s^2 \qquad (31)
\end{aligned}$$

Drugą całkę obliczamy przez rozkład na ułamki proste. Miejscami zerowymi mianownika są czwarte pierwiastki z -1, czyli liczby $\pm 1/\sqrt{2} \pm i/\sqrt{2}$. Wymnażając człony parami sprzężone dostajemy

$$s^4 + 1 = (s^2 - \sqrt{2}s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1) \tag{32}$$

czyli

$$\frac{s^2}{1+s^4} = \frac{As + B}{s^2 - \sqrt{2}s + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \tag{33}$$

Sprowadzając prawą stronę (33) do wspólnego mianownika i zugadniając współczynniki w liczniku dostajemy układ równań

$$\begin{cases} A + C & = 0 \\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D & = 1 \\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D & = 0 \\ B + D & = 0 \end{cases} \tag{34}$$

którego rozwiązaniem są liczby $A = 1/(2\sqrt{2}), C = -1/(2\sqrt{2}), B = D = 0$. Zatem

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{s^2}{1+s^4}\, ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{s}{s^2 - \sqrt{2}s + 1}\, ds - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{s}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}\, ds \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2s - \sqrt{2}}{s^2 - \sqrt{2}s + 1}\, ds + \frac{1}{4} \int \frac{ds}{\left(s - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\
&- \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2s + \sqrt{2}}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}\, ds + \frac{1}{4} \int \frac{ds}{\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left(\left| \frac{2s - \sqrt{2}}{2s + \sqrt{2}} \right| \cdot \frac{s^2 + \sqrt{2}s + 1}{s^2 - \sqrt{2}s + 1} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}s - 1) + \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}s + 1) \right)
\end{aligned}
\tag{35}
$$

$$
\begin{aligned}
V(L) &= -\frac{\pi G \rho_0}{\sqrt{2} r_0 L} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{\sqrt{2}L - r_0}{\sqrt{2}L + r_0} \right| \cdot \frac{L^2 + \sqrt{2} r_0 L + r_0^2}{L^2 - \sqrt{2} r_0 L + r_0^2} \right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2} \frac{L}{r_0} - 1 \right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2} \frac{L}{r_0} + 1 \right) \right] \\
&\quad - \frac{\pi^2 G \rho_0}{r_0^2} + \frac{2\pi G \rho_0}{r_0^2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{L}{r_0} \right)^2
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Potencjał *nie* jest osobliwy w $L = 0$, natomiast dla $L \gg r_0$

$$
V(L) \simeq -\frac{\pi^2 G \rho_0}{\sqrt{2} r_0 L} \tag{37}
$$

PFG