

Вышли в свет:

К. Симо, С. Смейл, А. Шенсине и др.
Современные проблемы хаоса и нелинейности

Под ред. А. В. Борисова и И. С. Мамаева
Незолонномные динамические системы

Под ред. В. Д. Лахно и М. Н. Устинина
Компьютеры и суперкомпьютеры в биологии

А. Д. Морозов, Т. Н. Драгунов
Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем

П. Г. Фрик
Турбулентность: подходы и модели

Под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М. А. Соколовского
Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей

А. С. Холсво
Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории
В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, А. Б. Нейман, Г. И. Стрелкова,
Л. Шиманский-Гайер

Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах

Под ред. А. Л. Фрадкова и О. А. Якубовского
Управление молекулярными и квантовыми системами

В. Эбелинг
Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур

Готовятся к печати:

Г. М. Заславский
Физика хаоса в гамилтоновых системах

В. Эбелинг

**ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУР
ПРИ НЕОБРАТИМЫХ
ПРОЦЕССАХ**

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР**

Перевод с немецкого
А. С. Доброславского
под редакцией
проф. Ю. Л. Климонтовича



R&C
Dynamics

Москва • Ижевск

2004

быть однозначным (рис. 10.1), т. е. из одной точки в пространстве исходит теперь много траекторий.

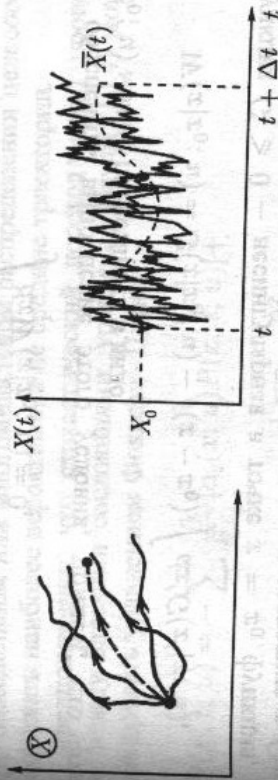


Рис. 10.1. Стохастическая и детерминистическая (пунктир) траектории в пространстве состояний X как функции времени.

Вероятность перехода из состояния $x_0 = x(t)$ в состояние $x = x(t + \Delta t)$ обозначим через

$$p = p(x, t + \Delta t | x_0, t; u).$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь один особый тип марковских стационарных процессов, для которых вероятность перехода можно пред- ставить в виде

$$p(x, t + \Delta t | x_0, t; u) = \delta(x - x_0) + W(x | x_0; u) \Delta t + O(\Delta t^2). \quad (10.2)$$

Обозначим плотность вероятности нахождения системы в состоянии x в момент времени t через $P = P(x, t; u)$. С помощью вероятностей перехода можно рассчитать эволюцию P во времени. Справедливо следующее соотношение:

$$P(x, t + \Delta t; u) = \int dx_0 p(x, t + \Delta t | x_0, t; u) P(x_0, t; u). \quad (10.3)$$

Подставляя в (10.3) выражение (10.2) и совершая предельный переход $\Delta t \rightarrow 0$, получаем следующее фундаментальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t; u) = \int dx_0 W(x | x_0; u) P(x_0, t; u). \quad (10.4)$$

Здесь мы всегда будем считать, что ядро W не зависит от P , т. е. уравнение линейно. Уравнение (10.4) представляет собой дифференциальную форму

ГЛАВА 10

Введение в стохастическую теорию

10.1. Стохастические модели необратимых процессов

В основной части настоящей книги рассматривались главным образом детерминистические модели необратимых процессов. Целью настоящей главы является краткое введение читателя в курс быстро развивающейся в настоящее время стохастической теории необратимых процессов. При этом мы ограничимся лишь важнейшими общими результатами этой теории, имеющими отношение к рассматриваемым здесь задачам. Интересованный читатель может обратиться за дальнейшей информацией к специальной литературе [17, 18, 207–210].

Мы говорим о детерминистической модели необратимого процесса, если, зная состояние $X(t_0)$, существующее в момент t_0 , можно однозначно рассчитать состояние $X(t)$ в более поздний момент времени $t > t_0$ ($X(t) = \{X_1(t), \dots, X_f(t)\}$). Будем считать, что зависимость состояния от времени определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = f(X; u), \quad (10.1)$$

где u обозначает множество параметров.

В реальных системах флуктуации всегда играют определенную роль; из-за их наличия нарушается однозначность предсказания будущего состояния. Вектор состояния $X(t)$ в стохастической модели заменяется величиной $x(t)$, подвергающейся случайным колебаниям: $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_f(t)\}$.

Учет флуктуаций переменных, описывающих состояние при динамическом моделировании, совершенствует детерминистическое описание и приводит к более адекватному отображению реальной системы. При этих условиях x становится стохастической переменной, так что если известно ее значение $x(t)$ в момент времени t , то о ее значении $x(t + \Delta t)$ в более поздний момент времени $t + \Delta t$ можно говорить лишь с известной вероятностью. Динамическое отображение в пространстве состояний X перестает

так называемого уравнения Чепмена-Колмогорова в стохастической теории. В силу условия нормировки $\int P dx = 1$ всегда должно выполняться равенство

$$\int dx W(x|x_0; u) = 0. \quad (10.4a)$$

Чтобы обеспечить выполнение этого условия, примем, что функцию $W(x|x_0; u)$ можно представить в виде

$$W(x|x_0; u) = G(x|x_0; u) - \delta(x - x_0) \int dx' G(x'|x; u),$$

где функция $G \geq 0$ — несингулярная в точке $x = x_0$ функция, имеющая смысл вероятности перехода из состояния x_0 в состояние x . Основное уравнение (10.4) принимает тогда следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t; u) = \int dx_0 [G(x|x_0; u)P(x_0, t; u) - G(x_0|x; u)P(x, t; u)]. \quad (10.5)$$

Уравнение (10.4), (10.4a) или (10.5) являются важнейшими уравнениями динамики стохастической модели и в физике называются основными кинетическими уравнениями или уравнениями Паули. При операторной записи этих уравнений,

$$\frac{\partial}{\partial t} P = \widehat{W}P, \quad (10.5a)$$

особенно отчетливо проявляется аналогия с детерминистическим выражением (10.1). Если путем решения уравнения Паули удастся найти $P(x, t; u)$ как функцию времени, то затем путем усреднения можно определить среднюю траекторию

$$\bar{x}(t; u) = \int dx x P(x, t; u) \quad (10.6)$$

Далее можно найти наиболее вероятную траекторию $\bar{x}(t, u)$, которая определяется максимумом распределения вероятностей как функции x в заданный момент времени, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} P(x, t; u) = 0 \quad \text{при} \quad x = \bar{x}(t; u), \quad (10.7)$$

и условием выпуклости.

Если в момент t имеются два или больше максимумов, то говорят о бимодальном или многомодальном распределении. Соответственно здесь имеются две или больше наиболее вероятных траекторий. Поскольку динамическая и стохастическая модели заданного процесса должны согласовываться

между собой, должна существовать связь решения для детерминистической модели, описываемой уравнением (10.1), со средней траекторией (10.6) или с наиболее вероятными траекториями (10.7). В связи с этим нужно заметить, что при бимодальном или многомодальном распределении целесообразнее рассматривать наиболее вероятные, а не средние траектории.

В предположении, что стохастический переход может происходить только между близкими состояниями, уравнение Паули (10.4) можно аппроксимировать уравнением Фоккера-Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t; u) = & - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} [\alpha_i(x; u)P(x, t; u)] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [\alpha_{ij}(x; u)P(x, t; u)] \end{aligned} \quad (10.8)$$

Усредняя уравнение (10.8), получаем уравнение средней траектории:

$$\frac{d}{dt} \bar{x}_i(t; u) = \bar{\alpha}_i(t; u).$$

Можно ожидать, что α_i , тесно связаны с заданными функциями f_i в уравнениях (10.1). Матрица $\alpha_{ij}(x; u)$ учитывает роль флуктуации. Для ряда процессов α_{ij} можно задать с помощью не зависящей от x диагональной матрицы:

$$\alpha_{ij}(x; u) = D(u)\delta_{ij}; \quad D(u) \geq 0. \quad (10.9)$$

При этом получается уравнение диффузионного типа.

Такое упрощенное уравнение Фоккера-Планка позволяет особенно легко проследить связь между детерминистическим и стохастическим описанием явления. Простейший способ учета флуктуаций детерминистической модели состоит во введении случайного источника:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_f; u) + F_i(t).$$

Среднее значение источника (ланжевенсовского члена) должно обращаться в нуль, $\overline{F_i(t)} = 0$. Положим, что корреляционная функция случайного источника имеет вид

$$\overline{F_i(t)F_j(t')} = \sqrt{D}\delta_{ij}\delta(t-t')$$

и высшие кумулянты обращаются в нуль. Тогда уравнение Фоккера-Планка (10.8) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x_1, \dots, x_f, t; u) = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i P) + \frac{D}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} P. \quad (10.10)$$

Более общий случай рассматривается в известной монографии Стратоновича [207].

Для многих процессов пространство состояний дискретно. Примером могут служить процессы, протекающие при химических реакциях: состоящие здесь из числа частиц, которые могут принимать лишь целые значения. Дискретным характером этого процесса можно пренебречь лишь при большом числе частиц, в то время как при малом числе частиц дискретность играет важную роль. В дальнейшем будем считать, что мы имеем счетное множество состояний, которые встречаются с вероятностями

$$p_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Для случая дискретных состояний уравнение Паули (10.4) и условие (10.4а) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_i(t; u) = \sum_j W_{ij}(u) p_j(t; u), \quad (10.11)$$

$$\sum_i W_{ij}(u) = 0, \quad W_{jj}(u) = - \sum_{i \neq j} W_{ij}(u), \quad (10.12)$$

или, эквивалентно,

$$\frac{\partial}{\partial t} p_i(t; u) = \sum_{i \neq j} [W_{ij} p_j - W_{ji} p_i]. \quad (10.13)$$

10.2. Асимптотическое поведение распределения вероятностей

В этом разделе мы покажем, что при известных предположениях распределение вероятностей по истечении достаточно большого времени стремится к определенному стационарному состоянию.

Рассмотрим описываемые уравнением (10.10) процессы типа дифференциальной функции распределения определяется как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} P^{(0)}(x; u) - \frac{d}{dx} \left[\frac{2}{D} f(x; u) P^0(x; u) \right] = 0,$$

Если заданы граничные условия $P^0(x; u) = 0$ на границах области изменения x ,

$$\left[\frac{d}{dx} P^0(x; u) - \frac{2}{D} f(x; u) P^0(x; u) \right] = 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty,$$

то уравнение имеет однозначное решение. Для частного случая градиентной системы, для которой

$$f_i(x; u) = - \frac{\partial}{\partial x_i} V(x; u), \quad (10.14)$$

такое решение может быть получено в явном виде. Если $V \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$, то оно имеет вид

$$P^0(x; u) = N^{-1} \exp \left[- \frac{2}{D} V(x; u) \right], \quad (10.15)$$

где N — нормировочная константа.

Рассмотрим теперь введенную Кульбеком и Ренья функцию $K(P, P^0)$, характеризующую изменение количества информации («относительную информацию») при переходе от произвольного распределения P к стационарному распределению P^0 :

$$K(P, P^0) = \int dx P(x, t) \ln \frac{P(x, t)}{P^0(x)}. \quad (10.16)$$

Дифференцируя по времени, находим

$$\frac{dK}{dt} = \int dx \frac{\partial P}{\partial t} \ln \frac{P}{P^0}.$$

Используя (10.10) и (10.15), путем ряда интегрирования по частям [211] получаем H -теорему:

$$\frac{d}{dt} K(P, P^0) = - \int dx \frac{D}{2P} \left| \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2}{D} P \frac{\partial V}{\partial x} \right|^2 \leq 0. \quad (10.17)$$

Из H -теоремы следует, что всякое начальное распределение асимптотически приближается к стационарному распределению (10.15). Монотонное убывание функции $K(P, P^0)$ можно также доказать для обобщенного уравнения Фоккера — Планка (10.8) [212]. Можно доказать H -теорему и для обобщенного случая. Снова предположим, что для стационарного состояния основное кинетическое уравнение $WP^0 = 0$ имеет только одно решение, которое нормировано и удовлетворяет граничным условиям. Единственность этого стационарного решения можно доказать в предположении, что пространство состояний является неприводимым, т. е. не может быть разделено на

не связанные траекториями области [213]. Используя это единственное стационарное решение, рассмотрим функцию $K(P, P^0)$ и вычислим ее производную по времени. После подстановки в уравнение (10.5) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} K(P, P^0) &= \int dx \int dx^0 \left[G(x|x^0) P(x^0, t) \ln \frac{P(x, t)}{P^0(x)} - \right. \\ &\quad \left. - G(x^0|x) P(x, t) \ln \frac{P(x, t)}{P^0(x)} \right] = \\ &= \int dx \int dx^0 G(x|x^0) P(x^0, t) \ln \frac{P(x, t) P^0(x^0)}{P^0(x) P(x^0, t)}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенствами $\ln x \leq (x-1)$ для $x > 0$ и $G(x|x^0) \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} K(P, P^0) &\leq \int dx \int dx^0 G(x|x^0) P(x^0, t) \left[\frac{P(x, t) P^0(x^0)}{P^0(x) P(x^0, t)} - 1 \right] = \\ &= \int dx \frac{P(x, t)}{P^0(x)} \int dx^0 G(x|x^0) P^0(x^0) - \int dx^0 P(x^0, t) \int dx G(x|x^0) = \\ &= \int dx \frac{P(x, t)}{P^0(x)} \int dx^0 [G(x|x^0) P^0(x^0) - G(x^0|x) P^0(x)] = 0. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Тем самым мы доказали H -теорему для обобщенного уравнения Паули в случае непрерывных переменных. Заметим, что для ядер вида

$$\begin{aligned} G(x|x^0) &= \exp[\beta H(x^0)] L(x|x^0), \\ L(x|x^0) &= L(x^0|x) \geq 0 \end{aligned} \quad (10.19)$$

стационарное распределение совпадает с каноническим распределением [213]

$$P^0(x) = Q^{-1} \exp[-\beta H(x)]. \quad (10.20)$$

Рассмотрим теперь дискретный случай. Стационарное решение уравнения Паули (10.11) определяется выражением

$$\sum_j W_{ij} p_j^0 = 0; \quad (10.21)$$

свойство (10.12) матрицы W_{ij} гарантирует существование по меньшей мере одного собственного вектора p_j^0 , представляющего решение вышеприведенного уравнения. Будем в дальнейшем считать, что матрица W_{ij} является неприводимой. С физической точки зрения это значит, что для всякой пары состояний (i, j) существует по крайней мере одна последовательность переходов в обоих направлениях, для которой вероятности переходов не обращаются в нуль. Теорема Кирхгофа гарантирует тогда существование одного и только одного стационарного решения [215]. В случае симметричной матрицы переходов $W_{ij} = W_{ji}$ из условия $\sum_i W_{ij} = 0$ следует, что $\sum_j W_{ij} = 0$ и

$$\sum_j (W_{ij} p_j^{\text{равн}}) = 0; \quad (10.22)$$

здесь

$$p_j^{\text{равн}} = \frac{1}{W} \quad \text{для всех } j = 1, 2, \dots, W, \quad (10.23)$$

где W — число состояний. Равномерное распределение, таким образом, является частным случаем стационарного распределения при симметричной матрице перехода.

Покажем теперь, что произвольное начальное распределение с течением времени асимптотически приближается к стационарному. Для этого снова определим относительную информацию

$$K(p_k, p_k^0) = \sum_i p_i(t) \ln \frac{p_i(t)}{p_i^0} \geq 0. \quad (10.24)$$

Дифференцирование с учетом (10.13), (10.12) и (10.21) дает

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \sum_i \dot{p}_i \ln \frac{p_i}{p_i^0} = \sum_{i \neq j} \left[W_{ij} p_j \ln \frac{p_i}{p_i^0} - W_{ji} p_i \ln \frac{p_i}{p_i^0} \right] = \\ &= \sum_{i \neq j} W_{ij} p_j \frac{p_i p_j^0}{p_i^0 p_j} \leq \sum_{i \neq j} W_{ij} p_j \left(\frac{p_i p_j^0}{p_i^0 p_j} - 1 \right) = \\ &= \sum_i \frac{p_i}{p_i^0} \sum_j W_{ij} p_j^0 - \sum_j p_j \sum_i W_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Здесь снова использовано неравенство $\ln x \leq (x-1)$. Получаем H -теорему:

$$\frac{d}{dt} K(p_k, p_k^0) \leq 0. \quad (10.26)$$

Знак равенства имеет место только при $p_k = p_k^0$; таким образом, из H -теоремы (10.26) следует, что любое начальное распределение стремится к стационарному распределению p_k^0 [113, 209, 214, 215].

В частном случае, когда конечное состояние P^0 или p_k^0 совпадает с равновесным распределением $P_{\text{равн}}$ и $p_k^{\text{равн}}$ из H -теоремы следует вывод о возрастании энтропии для замкнутой системы и уменьшении свободной энергии для системы, находящейся в равновесии с тепловым резервуаром. Подставляя (10.23) в (10.23), получаем

$$K(t) = \sum p_i \ln p_i + \ln W = \frac{1}{k} [S_{\text{равн}} - S(t)]. \quad (10.27)$$

Из H -теоремы, согласно которой $K \leq 0$, следует, что энтропия возрастает до максимального значения $S_{\text{равн}}$. Таким же образом путем подстановки динамического соотношения

$$F_{\text{равн}} = -kT \ln Q; \quad \beta = 1/kT$$

получаем выражение

$$K(t) = \int dx P(x, t) \ln P(x, t) + \beta \int dx H(x) P(x, t) - \beta F_{\text{равн}} = \beta [F(t) - F_{\text{равн}}]. \quad (10.28)$$

Из неравенства $K \leq 0$ следует, что свободная энергия уменьшается до минимального значения $F_{\text{равн}}$ [213].

Важнейший результат настоящего раздела заключается в доказательстве того, что при весьма общих предположениях решение уравнения Паули независимо от начальных условий асимптотически стремится к однозначно определенному равновесному распределению. В этом состоит его существенное отличие от решений детерминистических уравнений типа (10.1), которые в зависимости от начальных условий могут стремиться к различным устойчивым стационарным состояниям или предельным циклам. Квантовостатистическое обобщение H -теоремы (10.17), (10.18), (10.26) принадлежит Линдбладу и Ульману [216].

10.3. Вероятностные поверхности непрерывных систем

Предположим, что состояния рассматриваемой физической системы являются непрерывное пространство состояний (фазовое пространство).

Как показано в гл. 3, детерминистическому движению системы соответствует траектория в этом пространстве. Стохастическая модель той же физической системы характеризуется уже функцией распределения $P(x, t, u)$ состояний $X = \{X_1, \dots, X_f\}$ при заданной совокупности параметров $C = \{u\} = \{u_1, \dots, u_n\}$. Движение системы соответствует деформации этой функции — например, смещению максимумов, отвечающих наиболее вероятным состояниям. Функция $P(x, t, u)$ получается из решения уравнения в частных производных при заданных краевых и начальных условиях $P(x_1, \dots, x_f, 0)$. В общем случае необходимо решать уравнение Паули (10.5).

Важнейший результат предыдущего раздела состоит в доказательстве того, что при весьма общих предположениях стохастические системы всегда стремятся к однозначно определенному асимптотическому стационарному распределению $P^0(x, u)$. В этом отношении рассматриваемые в этой книге нелинейные необратимые системы не отличаются от линейных. Возникают, однако, следующие вопросы: 1) Чем отличаются стационарные распределения вероятностей в нелинейных системах от распределений в линейных системах? 2) Какие типы стационарных распределений вероятностей существуют? 3) Как отражается бифуркация детерминистического уравнения движения на стационарном распределении вероятностей?

На эти трудные вопросы сегодня пока не удается дать вполне удовлетворительный ответ, поскольку теория стохастических моделей еще не достигла такого развития, как теория детерминистических моделей. Однако для важного частного случая градиентных систем, определяемых уравнениями (10.10) и (10.14), можно в полной мере проследить связь между стохастической и детерминистической моделями. Как было показано в предыдущем разделе [ср. (10.15)], между потенциальной функцией детерминистической модели $V(x_1, \dots, x_f, u)$ и стационарным распределением вероятностей существует следующая связь:

$$P^0(x_1, \dots, x_f, u) = N^{-1} \exp \left[-\frac{2}{D} V(x_1, \dots, x_f, u) \right]. \quad (10.29)$$

Рассмотрим систему, описываемую функцией $V(x, u)$, в рамках детерминистической модели.

Стационарные состояния x^0 градиентной системы

$$\dot{x} = -\nabla_x V(x; u) \quad (10.30)$$

соответствуют локальным экстремумам потенциала V . Они лежат в гиперплоскости M пространства $R = C \times X$, описываемой уравне-

ниси $\nabla_x V(x^0; u) = 0$. (Напомним, что $X = \{X_1, \dots, X_p\}$, $C = \{u_1, \dots, u_k\} = \{u\}$.)

Стационарное состояние структурно устойчиво, если x^0 есть невырожденный локальный экстремум потенциала V , т. е. если детерминант Гесса

$$\mathcal{H} = \left| \frac{\partial^2 V(x, u)}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x^0} \neq 0 \quad (10.31)$$

отличен от нуля. В структурно-неустойчивом стационарном состоянии детерминант Гесса обращается в нуль, $\mathcal{H} = 0$. Тогда состояние x^0 соответствует либо вырожденному экстремуму, либо точке перегиба функции V и малые возмущения δV вызывают появление некоторого конечного числа топологически и физически различных локальных потенциальных форм $V + \delta V$, которые Том [66] назвал «универсальными разветвлениями».

Всем возможным возмущениям V соответствует k -параметрическое потенциальное множество универсальных разветвлений, поскольку всякая мыслимая малая деформация V топологически эквивалентна какой-нибудь из входящих в него деформаций.

При отображении $X: M \rightarrow C$ в C возникает характерная для потенциала $V + \delta V$ бифуркационная сетка, особые точки которой Том назвал «катастрофами», поскольку переменная состояния x претерпевает в этих точках катастрофические изменения.

Особое значение имеет случай $k = \dim C \leq 4$, поскольку тогда число катастроф *независимо* от размерности пространства не превышает семи. Геометрию бифуркационной сетки можно изучать с помощью простых потенциалов, представленных многочленами [66, 67]. Эти потенциалы приведены в табл. П.1, где Z есть максимальное число катастроф при данном значении k [66, 67].

Если состояние градиентной системы определяется не более чем четырьмя внешними параметрами, то ее локальное поведение может быть описано одним из семи потенциалов Тома. Это описание содержит все, что может быть выведено из топологии системы, в частности все возможные структурные неустойчивости, которые появляются как элементарные катастрофы при вырожденных экстремальных значениях этих потенциалов.

На рис. П.2 приведены некоторые примеры бифуркаций, соответствующих катастрофам Тома, для системы с одной степенью свободы, $f = 1$. Видно, что смысл «катастрофы» состоит в появлении или исчезновении структурно-устойчивых центров притяжения (аттракторов). Это приводит к резким изменениям в поведении системы.

Таблица 10.1

X $\dim = f$	V $x_1 \equiv x; x_2 \equiv y$	Z $\dim = k$	$V + \delta V$	Название катастрофы
1	x^3	1	$x^3 + u_1 x$	Конец
1	x^4	2	$x^4 + u_1 x^2 + u_2 x$	Пик
1	x^5	3	$x^5 + u_1 x^3 + u_2 x^2 + u_3 x$	«Ласточкин хвост»
2	$x^3 + y^3$	3	$x^3 + y^3 + u_1 xy - u_2 x - u_3 y$	Гиперболический фокус
2	$x^3 - 3xy^2$	3	$x^3 - 3xy^2 + u_1(x^2 + y^2) - u_2 x - u_3 y$	Эллиптический фокус
1	x^6	4	$x^6 + u_1 x^4 + u_2 x^3 + u_3 x^2 + u_4 x$	«Бабочка»
2	$x^2 y + y^4$	4	$x^2 y + y^4 + u_1 x^2 + u_2 y^2 - u_3 x - u_4 y$	Параболический фокус

Рассмотрим теперь стохастическую модель, описываемую потенциальной функцией $V(x; u)$. В силу соотношения (10.29) топология вероятностной поверхности $P^0(x; u)$ в пространстве состояний в точности соответствует топологии потенциальной функции, взятой с «обратным знаком». Устойчивым стационарным состояниям (локальным минимумам потенциальной функции V) соответствуют локальные максимумы вероятности P^0 , а неустойчивым стационарным состояниям (локальным максимумам функции V) соответствуют локальные минимумы вероятности P^0 . Для частного случая линейной системы $V(x; u)$ является квадратичной формой, поэтому существует только один максимум. В случае нелинейной системы существует только один максимум. В случае нелинейной системы поверхность $V(x; u)$ может иметь два и более максимумов. Тогда говорят о бимодальной или многомодальной вероятностной поверхности. При изменении параметра и максимумы и минимумы смещаются так же, как гребни и впадины «вероятностной поверхности» в точном соответствии с детерминистической картиной.

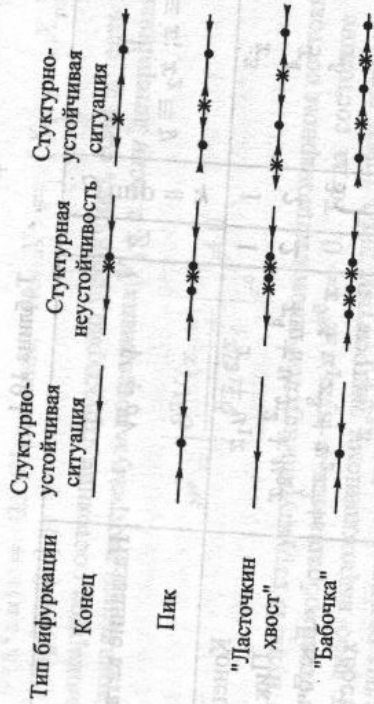


Рис. 10.2. Переходы детерминистической динамической системы через структурно-неустойчивые ситуации в случае $\dim X = f = 1$.

В непосредственной близости от структурных неустойчивостей деформации вероятностного профиля $P^0(x; u)$ приводят к качественно новым свойствам, например к образованию новых локальных экстремумов. Если число экстремумов меняется, то говорят об изменении модальности вероятностной поверхности $P^0(x; u)$. Изменения модальности вероятностной поверхности для структурных неустойчивостей. Некоторые примеры вероятностных поверхностей для одномерных систем приведены на рис. П.3.

Теперь рассмотрим стохастическую систему с непрерывным пространством состояний ($f \geq 2$). Поскольку для $f \geq 2$ в общем случае не существует производящих потенциалов, теорию катастроф Тома нельзя непосредственно применить к классификации бифуркаций в детерминистической картине и приходится обращаться к общей теории бифуркаций [63]. Для классификации соответствующих вероятностных поверхностей в настоящее время предложены новые методы, основанные на теории катастроф [211]. Мы исходим из следующих соображений:

В обобщенном случае стационарное распределение вероятностей образует поверхность в пространстве состояний и параметров. Естественно было бы поэтому попытаться применить теорию катастроф Тома для классификации локального поведения вероятностной поверхности. Введем для этого поверхность локальных экстремумов вероятности M' . Она образована экстремальными значениями стационарного распределения вероятностей и определяется уравнением

$$\frac{\partial P^0(x; u)}{\partial x_i} = 0. \tag{10.32}$$

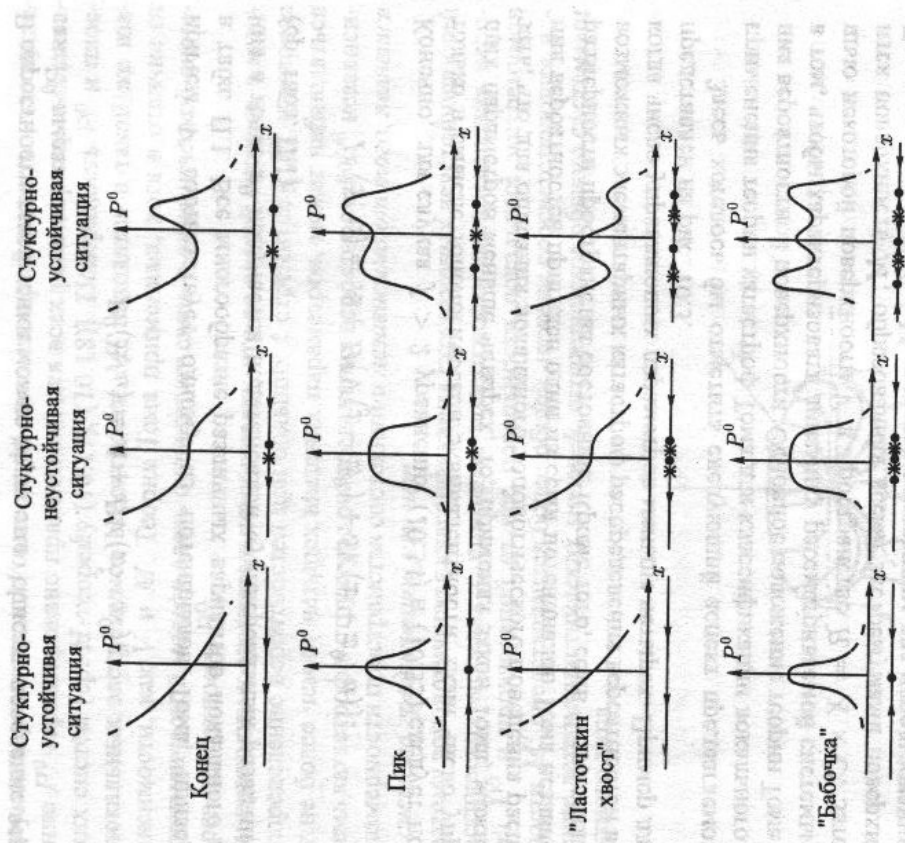


Рис. 10.3. Структурные неустойчивости вероятностной поверхности одномерной системы и соответствующие неустойчивости системы, описываемой траекториями в детерминистической модели.

В дальнейшем будем называть стохастическую систему структурно-неустойчивой, если ее вероятностная поверхность имеет вырожденные экстремумы или точки перегиба, т. е. если существует по крайней мере одна точка x^0 , для которой

$$\frac{\partial P^0(x; u)}{\partial x_i} \Big|_{x^0} = 0, \quad \left| \frac{\partial^2 P^0(x; u)}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x^0} = 0. \tag{10.33}$$

В окрестности такой точки можно полностью описать поведение вероятности P^0 выражением

$$P^0(x; u) = A + BV(x - x^0), \quad (10.34)$$

причем V соответствует одному из потенциалов Тома, приведенных в табл. П.1. Все многообразие различных вариантов локального поведения в точке x^0 получается подстановкой «универсальных развитий» Тома (ср. табл. П.1):

$$P^0(x, u) = A + B\{V(x - x^0) + \delta V(x - x^0, u)\}. \quad (10.35)$$

Конечно, для случая $f > 2$ уравнения (10.34) и (10.35) следует понимать только в смысле топологической эквивалентности. Если число управляющих параметров меньше четырех, то, применяя закон Тома, можно показать, что для описания локального топологического поведения распределения вероятностей пригоден один из семи потенциалов Тома независимо от размерности пространства состояний. Кроме того, семь — это также число возможных элементарных катастроф распределения вероятностей в случае, когда число управляющих параметров меньше четырех. Пример для $f = 1$ представлен на рис. 10.3.

Здесь хотелось бы отметить следующий аспект предлагаемого нами применения теории катастроф Тома для классификации локального поведения вероятностной поверхности. Основное положение теории Тома состоит в том, чтобы характеризовать динамику рассматриваемой системы с помощью некоторой поверхности V в пространстве $R = X \times C$. Затем строится поверхность M , образованная всеми экстремумами поверхности V . Такая связь между V и M является основанием для использования теории катастроф, которая занимается частным случаем задачи об устойчивости дифференцируемых отображений, а именно случаем изолированной сингулярности потенциальной функции V . Чтобы установить связь с рассматриваемой системой, плоскость M интерпретируется обычно как плоскость стационарных состояний динамической системы. При этом существует, чтобы динамическая система была градиентной системой.

При $\dim X = f \geq 2$ последнее требование существенно ограничивает применимость теории Тома, поскольку, как известно, подавляющее число исследуемых в естественности динамических систем не относится к градиентному типу.

Применение теории катастроф для топологической классификации вероятностной поверхности P^0 вместо V и введение поверхности локальных

экстремумов вероятности M' вместо M имеет то преимущество, что существование P^0 гарантировано практически для всех рассматриваемых динамических систем [ср. H -теорему (10.17), (10.18)]. Поверхность P^0 и плоскость локальных экстремумов вероятности M' находятся в такой же взаимозависимости, как V и M . Теория Тома применима, хотя в отличие от детерминистической модели здесь существует связь с динамической системой через поверхность P^0 .

Мы приходим к окончательному выводу, что во всякой системе, в которой распределение вероятностей при больших t стремится к P^0 и которая зависит не более чем от четырех внешних параметров, может наблюдаться лишь семь катастроф в структуре распределения вероятностей P^0 независимо от размерности пространства состояний и независимо от того, является ли эта система градиентной или нет.

Поэтому топологическая классификация структурных неустойчивостей в стохастических моделях с помощью поверхности распределения вероятностей P^0 и производной от нее поверхности локальных экстремумов вероятности M' представляется более общей, нежели соответствующее исследование детерминистических моделей, ограниченное обычно системами градиентного типа.

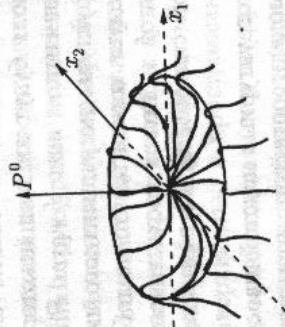


Рис. 10.4. «Вероятностная яма», описываемая уравнением (10.36).

Потенциалы Тома определяют также локальное поведение флуктуаций в окрестности катастроф. В силу условий (10.33) гребень распределения вероятностей в окрестности точки катастрофы x^0 имеет ровное плато. Следовательно, флуктуации $\xi = x - x^0$ в некоторой окрестности равновероятны, иначе говоря, могут возникать достаточно большие флуктуации. Здесь проявляется известная аналогия с термодинамическим фазовым переходом [17, 18]. В заключение упомянем нерешенную проблему, возникающую при классификации стохастических процессов с помощью катастроф