Mechanika Kwantowa
kurs dla doktorantów – 22
10.5.2005

1. Przesunięcie Lamba

W celu otrzymania numerycznego oszacowania przesunięcia Lamba

$$\Delta E_m = \sum_n \sum_\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2\pi\hbar}{\omega_k} \left|\langle m| J_{\sigma_{\vec{k}}} |n\rangle\right|^2 \mathcal{P} \frac{1}{E_m - E_n - \hbar\omega_k},$$

należy oszacować element macierzowy $\langle m| J_{\sigma_{\vec{k}}} |n\rangle$. W tym celu stosuje się przybliżenie dipolowe

$$\vec{J}_{\vec{k}} = e\frac{d\vec{r}}{dt} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \simeq \frac{e}{m}\vec{p} + \ldots.$$

Następnie wykonuje się sumę po σ i całkę po kątach z d^3k

$$\int d\Omega_k \sum_\sigma |\langle m| \vec{p} |n\rangle|^2 = \frac{8\pi}{5} \langle m| \vec{p} |n\rangle \cdot \langle n| \vec{p} |m\rangle .$$

Wygodnie jest też skorzystać z tożsamości

$$\frac{1}{E_m - E_n - \hbar\omega_k} = \frac{1}{\hbar\omega_k} \left[\frac{E_m - E_n}{E_m - E_n - \hbar\omega_k} - 1 \right]$$

i zaniedbać człon z 1(dlaczego?). W kolejnym kroku wykonuje się całkę po dk, obcinając ją od góry w $k_{\max}$, która daje w wyniku

$$\ln\left|\frac{E_m - E_n - \hbar c k_{\max}}{E_m - E_n}\right| \simeq \ln\left|\frac{\hbar c k_{\max}}{\Delta E_{av}}\right|,$$

gdzie ΔE_{av} jest średnią odległością poziomów w atomie wodoru. Ten trick pozwala uczynić logarytm, który jest dość wolno zmienną funkcją, czynnikiem nie zależnym od n. W ten sposób daje się wykonać sumę po n:

$$\sum_n (E_m - E_n) \langle m| \vec{p} |n\rangle \cdot \langle n| \vec{p} |m\rangle = \frac{1}{2} \langle m| [[H, \vec{p}], \vec{p}] |m\rangle .$$

Pokazać, że ostatni człon jest proporcjonalny do $\langle m| \Delta\Phi |m\rangle$, gdzie Φ jest potencjałem Coulombowskim, a Δ laplasjanem. Ostatecznie

$$\Delta E_m \simeq Z\alpha^2 \frac{4}{3m^2} \ln\left|\frac{\hbar c k_{\max}}{\Delta E_{av}}\right| |\psi_m(0)|^2 .$$

Proszę dokonać oszacowania numerycznego przesunięcia Lamba dla stanu $2S_{1/2}$ (1040 Hz).