Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów – 19

12.4.2005

1. Rozdział 8-4 z podręcznika Feynmana i Hibbsa. Zapisać funkcję Langrange'a periodycznego układu N kulek połączonych sprężynami:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j^2 - \frac{\nu^2}{2}\left\{\sum_{j=1}^{N-1}(q_{j+1}-q_j)^2 + (q_1 - q_N)^2\right\},$$

przy pomocy rzeczywistych współrzędnych normalnych. Przyjąć, że N jest nieparzyste.

Znaleźć funkcję falową Φ_0 stanu podstawowego dla systemu kulek z poprzedniego zadania. Wyliczyć wartości oczekiwane w tym stanie następujących operatorów:

$$Q_\alpha, \quad Q_\alpha^\star, \quad Q_\alpha^2, \quad Q_\alpha^{\star\,2}, \; Q_\alpha^\star Q_\alpha$$

gdzie Q_α, $\;Q_\alpha^\star$ są zespolonymi współrzędnymi normalnymi.

2. Pokazać, że równania Maxwella bez ładunków i prądów redukują się dla potencjału $\vec{A}$ do równania falowego

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Rozwinąć $\vec{A}(\vec{r},t)$ na fale płaskie $\exp\left(i\vec{k}\,\vec{r}\right)$ z zależnymi od czasu amplitudami $\vec{a}(\vec{k},t)$. Pokazać, że amlitudy $\vec{a}$ spełniają równanie oscylatora harmonicznego o częstości $\omega = |\vec{k}|c$. Sprawdzić, że $\vec{a}\perp\vec{k}$ i że pola $\vec{E}$, $\vec{B}$ oraz wektor falowy $\vec{k}$ są wzajemnie prostopadłe.

3. Nienaładowana cząstka o spinie 0 (np. neutralna cząstka π) opisana jest w teorii pola następującą funkcją Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - c^2\left|\vec{\nabla}\phi\right|^2 + \frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\phi^2\right]d^3\vec{r},$$

gdzie $\phi = \phi(\vec{r},t)$ jest polem skalarnym opisującym tę cząstkę. Jaki wymiar ma pole ϕ ? Jaki wymiar i sens fizyczny ma występująca w lagrangeanie stała μ ? Znaleźć równania ruchu dla pola ϕ. Przeprowadzając analizę fourierowską analogiczną do tej z poprzedniego zadania dla pola $\vec{A}$ wykazać, że energia wzbudzeń pola ϕ dana jest relatywistycznym wzorem Eisteina

$$E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 - \mu^2c^4}.$$