Mechanika Kwantowa
kurs dla doktorantów – 16 i 17
22.3.2005

1. Działanie dla pola elektromagnetycznego sprowadza się w zasadzie do dwóch członów S_{rad} i S_{int}, które w sumie dają działanie mające formę oscylatora wymuszonego siłą $f(t)$. Klasyczne działanie i propagator $K_f(a', a; T)$ dla oscylatora wymuszonego odpowiadające przejściu od punktu a do punktu a' w czasie T wyliczyliśmy w zeszłym semestrze. W elektrodynamice kwantowej potrzebna nam będzie znajomość amplitud przejścia od stanu ϕ do stanu ϕ'. W szczególności będziemy potrzebować znajomość amplitudy próżniowej x_{00} danej wzorem:

$$x_{00}[f] = e^{i\frac{\omega T}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} da' \int_{-\infty}^{+\infty} da\, \phi_0^*(a')\, K_f(a', a; T)\, \phi_0(a), \tag{1}$$

gdzie stacjonarna funkcja falowa stanu podstawowego oscylatora harmonicznego ma postać:

$$\phi_0(a) = \sqrt[4]{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega}{2\hbar}a^2}. \tag{2}$$

Faza $e^{i\omega T/2}$ odpowiada zależności czasowej pełnej funkcji falowej oscylatora. Proszę wyliczyć x_{00}. Odpowiedź jest bardzo prosta:

$$x_{00} = \exp\{-\frac{1}{4\omega\hbar} \int_0^T dt \int_0^T ds\, f(t)\, f(s)\, e^{-i\omega|t-s|}\}, \tag{3}$$

ale rachunek jest bardzo żmudny. Aby kontrolować rachunki, warto cały czas uważać, aby operować wyrażeniami jawnie symetrycznymi ze względu na zamianę $t \leftrightarrows s$. Warto też wprowadzić nowe zmienne: $a' = x + y$, $a = x - y$. Jako pierwszy krok, należy wykonać formalnie całki pd da i da'. W tym celu warto wprowadzić oznaczenia

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\omega}{2i\hbar \sin\omega T}, \\
A &= \frac{1}{\omega}\int_0^T dt\, f(t)\, \sin\omega t, \\
A' &= \frac{1}{\omega}\int_0^T ds\, f(s)\, \sin\omega\,(T-s)\,, \\
B &= \frac{1}{\omega^2}\int_0^T dt\, f(t) \int_0^t ds\, f(s)\, \sin\omega\,(T-t)\sin\omega s, \\
c &= \cos\omega T.
\end{aligned}$$