Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów – 15

10.3.2005

1. Wyprowadzić równanie Schrödingera dla cząstki poruszającej się w polu magnetycznym o potencjale wektorowym $\vec{A}$. W tym celu rozpatrzyć ewolucję czasową funkcji falowej o jeden „skok" czasowy:

$$\psi(x, t+\epsilon) = \int d^3\vec{y}\, K(\vec{x}, \vec{y}, \epsilon)\psi(y, t). \tag{1}$$

Korzystając ze znanej formy K i podanego na wykładzie przepisu na dyskretyzację całki oddziaływania z potencjałem wektorowym, rozwinąć wyrażenia występujące w równaniu (**??**) z dokłądnością do wyrazów rzędu ϵ. W tym celu całkę po $d^3\vec{y}$ zamienić na całkę po $d^3\vec{\eta}$, gdzie $\vec{x} = \vec{y} + \vec{\eta}$. Pokazać, że otrzymany wynik daje się „zwinąć" do Hamiltonianu:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right).$$

2. Korzystając z zasady najmniejszego działania, wyprowadzić klasyczne równania pola i równania ruchu cząstki w polu dla działania danego wzorem:

$$\begin{aligned} S &= \frac{m}{2}\int \dot{\vec{q}}(t)^2\, dt \\ &+ e\int \left\{\phi[\vec{q}(t), t] - \frac{1}{c}\,\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}[\vec{q}(t), t]\right\} d^3x\, dt \\ &+ \frac{1}{8\pi}\int \left\{\left|\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right|^2 - \left|\vec{\nabla} \times \vec{A}\right|^2\right\} d^3x\, dt, \end{aligned}$$

w którym zmiennymi są: $\phi(\vec{x}, t)$, $\vec{A}(\vec{x}, t)$ oraz $\vec{q}(t)$