Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów
zestaw 13
25 styczeń 2005

1. Energia kinetyczna. Proszę przeczytać z podręcznika Feynmana Hibbsa rozdział 7-3 zwracając szczególną uwagę na problem definicji energii kinetycznej.

   W następującym uogólnieniu propagatora:

$$
\begin{aligned}
< 1 > \quad = \quad & \int \ldots \int \left(\frac{m_1}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2} dx_1 \ldots \left(\frac{m_{n-1}}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2} dx_{n-1} \left(\frac{m_n}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2} \\
& \exp\left\{\frac{1}{\hbar}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2\epsilon} - \epsilon V(x_i)\right)\right\},
\end{aligned}
$$

   można zmieniać m_i niezależnie od pozostałych mas. Kładąc wszystkie masy równe m, odzyskuje się standardową postać propagatora. Należy obliczyć zmianę propagatora, wywołaną przeskalowaniem i-tej masy m_i: $m_i \to m_i(1+\eta)$ dla małych η.

2. Pokazać, że dla oscylatora harmonicznego zachodzą związki:

$$
\begin{aligned}
< x(t) > \quad &= \quad \overline{x}(t) < 1 > \\
< x(t)x(s) > \quad &= \quad [\overline{x}(t)\overline{x}(s) + g(s,t)] < 1 > \\
< x(t)x(s)x(u) > \quad &= \quad [\overline{x}(t)\overline{x}(s)\overline{x}(u) + \overline{x}(t)g(s,u) + \overline{x}(s)g(t,u) + \overline{x}(u)g(t,s)] < 1 >
\end{aligned}
$$

   gdzie $\overline{x}(t)$ jest klasyczną trajektorią, a $g(t,s)$ dane jest wzorem:

$$
g(t,s) = \frac{i\hbar}{m\omega\sin\omega T}\sin\omega(t_2 - t)\sin\omega(s - t_1), \quad s < t
$$

$$
g(t,s) = \frac{i\hbar}{m\omega\sin\omega T}\sin\omega(t_2 - s)\sin\omega(t - t_1), \quad t < s.
$$

   Wskazówka: Wyprowadzić wzór:

$$
\left\langle \exp\frac{i}{\hbar}\int dt f(t)x(t)\right\rangle_S = \exp\frac{i}{\hbar}(S'_{cl} - S_{cl}) < 1 >_S
$$

   i podstawić do niego znane wyrażenia na dzialanie dla oscylatora bez wymuszenia (S_{cl}) i z wymuszeniem $f(t)$ (S'_{cl}). Wypisując różnicę przekonać się, że:

$$
S'_{cl} - S_{cl} = \frac{i}{2\hbar}\int\int f(t)f(s)g(t,s)dtds + \int f(t)\overline{x}(t)dt.
$$

   Różniczkując ten wzór ze względu na f otrzymujemy kolejno wzory, o które chodzi w zadaniu.

3. Znaleźć w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo przejścia dla potencjału $V(x,t) = V(x)f(t)$, gdzie $f(t)$ dane jest wzorem:

$$
f(t) = \begin{cases}
\frac{1}{2}e^{\gamma t}, & t < 0, \\
1 - \frac{1}{2}e^{-\gamma t}, & 0 < t < \frac{T}{2}, \\
1 - \frac{1}{2}e^{-\gamma(T-t)}, & \frac{T}{2} < t < T, \\
\frac{1}{2}e^{-\gamma(t-T)}, & T < t.
\end{cases}
$$

Odpowiedź:

$$P(n \to m) = \left(\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + (E_m - E_n)^2} \right)^2 |V_{mn}|^2 \frac{4 \sin^2 \frac{(E_m - E_n)T}{2\hbar}}{(E_m - E_n)^2}.$$

Porównać z wynikiem, kiedy zaburzenie włączane jest gwałtownie w jednej chwili.